Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Vertex cover

Είσοδος: Γράφημα $G = (V, E)$.

Έξοδος: Ένα ***κάλυμμα κορυφών** (cover)* για το G ελάχιστης πληθυκότητας.

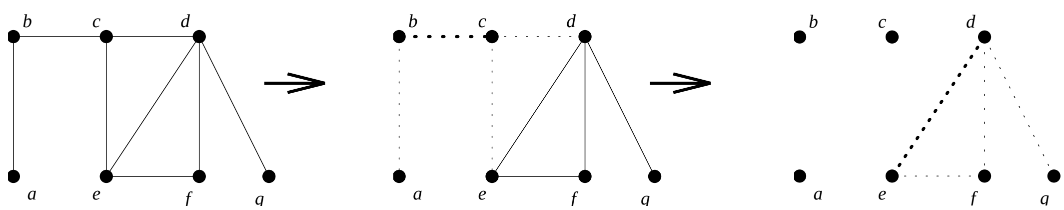
Approx_Vertex_Cover(G)

1. $C \leftarrow \emptyset$
2. $E' \leftarrow E$
3. **while** $E' \neq \emptyset$ **do**
    - Let (u, v) be an arbitrary edge of E'.
    - $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
    - Remove from E' every edge incident on either u or v.

Πολυπλοκότητα $O(E)$

Σημείωση Στην περίπτωση που η βέλτιση λύση είναι περιττός αριθμός, ο παραπάνω προσεγγιστικός αλγόριθμος δεν θα δώσει ποτέ την σωστή απάντηση.

Παράδειγμα



Επιλέγεται η ακμή (b, c). $\Longrightarrow \quad C = \{b, c\}$

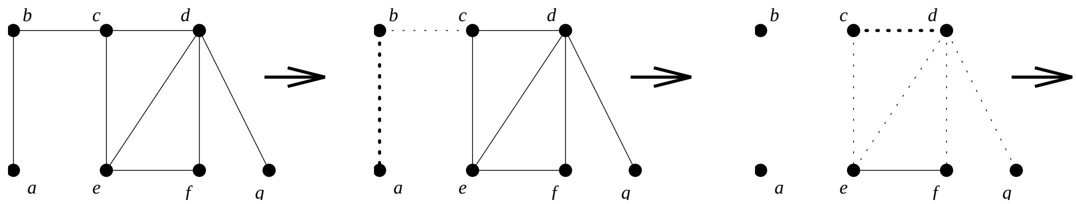
Επιλέγεται η ακμή (d, e). $\Longrightarrow \quad C = \{b, c, d, e\}$

$\Longrightarrow \quad C = \{b, c, d, e\}$

- Σημειώνουμε ότι $C^* = \{b, e, d\}$.

- Αν αφαιρέσουμε τις ακμές με διαφορετική σειρά μπορεί να πάρουμε ένα "κάλυμμα" C' με $|C'| > 4$.

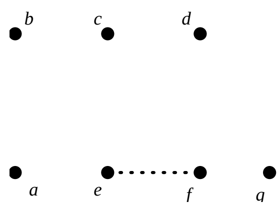
Παράδειγμα



Επιλέγεται η (a, b).
$\Longrightarrow \quad C' = \{a, b\}$

Επιλέγεται η ακμή (c, d).
$\Longrightarrow \quad C' = \{a, b, c, d\}$

Επιλέγεται η ακμή (e, f).
$\Longrightarrow \quad C' = \{a, b, c, d, e, f\}$



$\Longrightarrow \quad C' = \{a, b, c, d, e, f\}, \ |C'| = 6$

Θεώρημα Έστω C το κάλυμμα που υπολογίζεται από τον $Approx\_Vertex\_Cover(G)$, και C^* ένα βέλτιστο κάλυμμα. Τότε,

$$|C| \leq 2|C^*|$$

Απόδειξη

- Έστω A το σύνολο των ακμών που επιλέχτηκαν από τον αλγόριθμο.

- Το κάλυμμα C αποτελείται από τα άκρα των ακμών του A.

- **Οι ακμές του A δεν έχουν κοινά άκρα.**

$\Longrightarrow$ Κάθε κάλυμμα θα περιέχει τουλάχιστον ένα άκρο για κάθε ακμή του A.

$\Longrightarrow \quad |A| \leq |C^*|$
$\Longrightarrow \quad 2|A| \leq 2|C^*|$
$\Longrightarrow \quad |C| \leq 2|C^*|$

$\square$

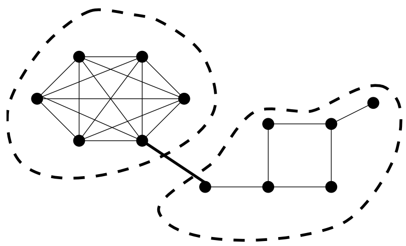
Heuristics

- Υπάρχουν ορισμένα προβλήματα για τα οποία δεν γνωρίζουμε κάποιον προσεγγιστικό αλγόριθμο. Για τα προβλήματα αυτά, δοκιμάζουμε *ευρετικές μεθόδους (heuristics)* και ελπίζουμε για το καλύτερο!

Graph Partitioning (Bisection)

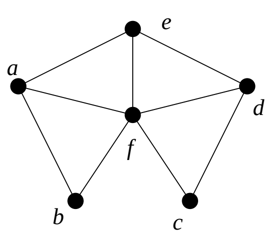
Είσοδος:	Γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε $\|V\| = 2k$.
Έξοδος:	Μία *διαμέριση* του V σε δύο σύνολα V_1 και V_2 έτσι ώστε $\|V_1\| = \|V_2\| = k$ και το πλήθος των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο V_1 και το άλλο στο V_2 να είναι ελάχιστο.

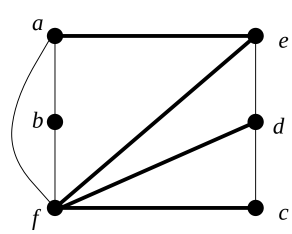
Παράδειγμα



$Bisection = 1$

Παράδειγμα





$Bisection = 4$

Ο αλγόριθμος των Kernighan-Lin

Μια απλοποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου είναι η παρακάτω:

Simplified_Kernighan-Lin(G)

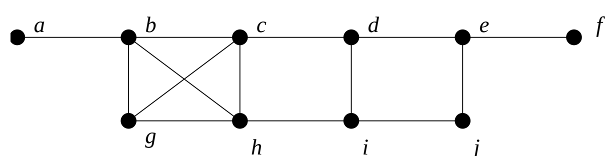
1. Start with an arbitrary initial partition $V_1,\ V_2$.
2. **while** there are sets $A \subset V_1$ and $B \subset V_2$ with $|A| = |B|$ such that when exchanged the bisection reduces **do**

    $V_1 \leftarrow V_1 - A \cup B$

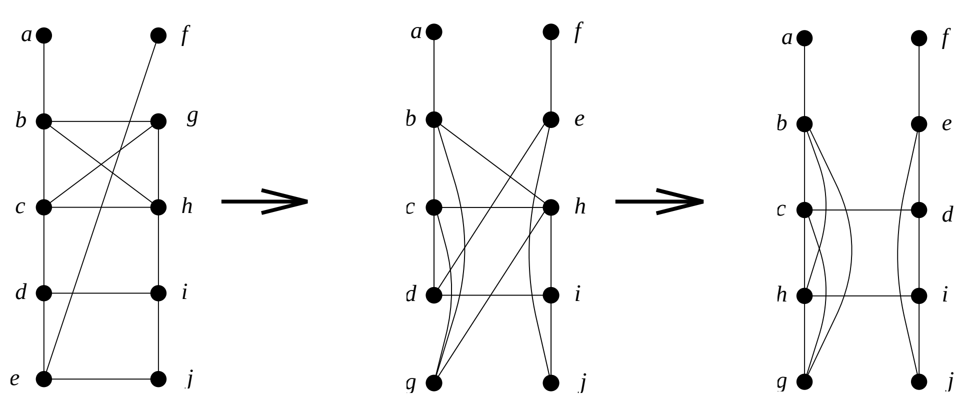
    $V_2 \leftarrow V - V_1$

- Η διαμέριση που προκύπτει εξαρτάται από την αρχική διαμέριση.
- Η διαμέριση που προκύπτει εξαρτάται από την σειρά με την οποία γίνονται οι ανταλλαγές.
- Ο αλγόριθμος αποδίδει στην πράξη. Χρησιμοποιείται από το 1971.
- Ένας παρόμοιος (δημοφιλής και γρήγορος) αλγόριθμος βρέθηκε από τους Fiduccia και Matheyses (1982).

Παράδειγμα



Έστω $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$
$V_2 = \{f, g, h, i, j\}$



$Bisection = 7$
Ανταλλαγή του g με το e.

$Bisection = 5$
Ανταλλαγή του h με το d.

$Bisection = 2$

- Στο παράδειγμα αυτό, πήραμε την βέλτιστη λύση. Δεν θα είμαστε τόσο τυχεροί πάντα!