Δυσεπίλυτα Προβλήματα

- **3-SATISFIABILITY (3-SAT)**

Δεδομένα: Μία συλλογή $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ από "φράσεις"(clauses) από ένα πεπερασμένο σύνολο U με n προτασιακές μεταβλητές, τέτοια ώστε $|c_i| = 3$ για $1 \leq i \leq m$.

Ερώτηση: Υπάρχει απονομή αλήθειας για το U που να ικανοποιεί όλες τις φράσεις του C;

Παράδειγμα

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \quad C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$c_1 = x_1 + x_2 + \overline{x_3}$

$c_2 = \overline{x_1} + x_4 + \overline{x_5}$

$c_3 = x_1 + \overline{x_4} + x_5$

$c_3 = x_3 + x_4 + x_5$

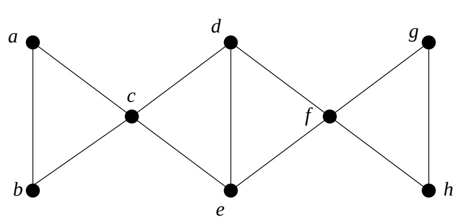
Απάντηση: ΝΑΙ, $(x_1 = T/F, \;\; x_2 = T, \;\; x_3 = T/F, \;\; x_4 = T, \;\; x_5 = T)$

- **ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ - VERTEX COVER (VC)**

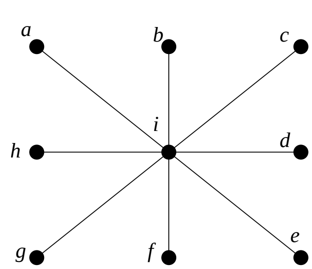
Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και θετικός ακέραιος $k \leq |V|$.

Ερώτηση: Υπάρχει κάλυμμα κορυφών για το G μεγέθους το πολύ k, δηλαδή, *ένα υποσύνολο* $V' \subseteq V$ *τέτοιο ώστε* $|V'| \leq k$ *και για κάθε ακμή* $(u, v) \in E$ *τουλάχιστον ένας από τους* u *και* v *να ανήκει στο* V'.

Παραδείγματα



	Απάντηση
$k = 1$	ΟΧΙ
$k = 2$	ΟΧΙ
$k = 3$	ΟΧΙ
$k = 4$	ΟΧΙ
$k = 5$	**ΝΑΙ** (b, c, e, f, h)
$k \geq 6$	ΝΑΙ



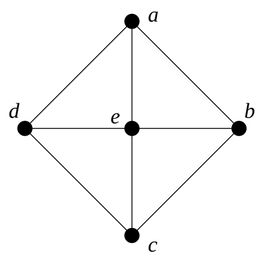
	Απάντηση
$k = 1$	**ΝΑΙ** (i)
$k \geq 2$	ΝΑΙ

• **k-ΧΡΩΜΑΤΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ (χρωματικός αριθμός)**

Δεδομένα: Γράφημα $G = (V, E)$ και θετικός ακέραιος $k \leq |V|$.

Ερώτηση: Είναι το G k-χρωματίσιμο, δηλαδή, *υπάρχει συνάρτηση* $f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ *έτσι ώστε* $f(u) \neq f(v)$ *για κάθε* $(u, v) \in E$;

Παράδειγμα



	Απάντηση
$k = 1$	ΟΧΙ
$k = 2$	ΟΧΙ
$k = 3$	**ΝΑΙ** $(a \to 1,\ b \to 2,\ c \to 1,\ d \to 2,\ e \to 3)$
$k \geq 4$	ΝΑΙ

Είναι "εύκολο" να βρεθεί εκθετικός αλγόριθμος για καθένα από αυτά τα προβλήματα.

3-SATISFIABILITY (3-SAT)

- Έστω S το σύνολο όλων των πιθανών απονομών αλήθειας. $(|S| = 2^n)$
- **While** $S \neq \emptyset$ **do**
  - Let α be an assignment in S.
  - $S = S - \{\alpha\}$
  - **If** α satisfies all clauses **then**
    - ANSWER= **TRUE**
    - **Exit** and **Stop.**
- ANSWER= **FALSE**

Πολυπλοκότητα $O(2^n|C|) = O(m2^n)$

VERTEX COVER (VC)

- Έστω S το σύνολο όλων των υποσυνόλων του V πληθυκότητας k. $(|S| = \binom{|V|}{k})$
- **While** $S \neq \emptyset$ **do**
    - Let α be a subset in S.
    - $S = S - \{\alpha\}$
    - **If** α "covers" all edges of E **then**
        - ANSWER= **TRUE**
        - **Exit** and **Stop**.
- ANSWER= **FALSE**

Πολυπλοκότητα $O(\binom{|V|}{k}|E|)$

VERTEX COVER (VC)

Μπορούμε να πάρουμε παρόμοιο αλγόριθμο.

$\binom{n}{\lambda n} \leq 2^{nH(\lambda)}$ όπου,
$H(\lambda) = -\lambda \log \lambda - (1-\lambda)\log(1-\lambda),\ 0 \leq \lambda \leq 1$ (*συνάρτηση εντροπίας*).

- Ένα πρόβλημα *επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο* αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που το επιλύει σε $O(n^c)$ χρόνο, για κάποια σταθερά c.

- Η κλάση πολυπλοκότητας P ορίζεται ως το σύνολο όλων των προβλημάτων απόφασης που επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

- Τα προβλήματα που επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο θεωρούνται ***εφικτά*** *(tractable)*.

- Τα προβλήματα που απαιτούν *υπερ-πολυωνυμικό* χρόνο θεωρούνται ***μη εφικτά*** *(intractable)*.

NP-Complete προβλήματα

- Κλάση προβλημάτων για τα οποία είναι άγνωστη η κατάστασή τους.
- Δεν έχει βρεθεί ακόμα πολυωνυμικός αλγόριθμος για κάποιο NP-Complete πρόβλημα.
- Δεν έχει αποδειχθεί κάποιο υπερ-πολυωνυμικό κάτω φράγμα για κανένα NP-Complete πρόβλημα.

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

- Το πλέον γνωστό ανοιχτό πρόβλημα στην Επιστήμη των Υπολογιστών από το 1971 (Cook).
- Εικάζεται ότι $P \neq NP$.

Λόγος: Εάν ένα NP-Complete πρόβλημα λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο τότε ΌΛΑ τα NP-Complete προβλήματα επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο.

- *"Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness"*, Michael R. Garey and David S. Johnson, W.H. Freeman and Company, 1979.

Τι κάνουμε όταν ένα πρόβλημα είναι NP-Complete;

- Για προβλήματα βελτιστοποίησης, επιθυμούμε μία λύση κοντά στην βέλτιστη.
- Ένας αλγόριθμος που επιστρέφει σχεδόν-βέλτιστες λύσεις ονομάζεται *προσεγγιστικός αλγόριθμος*.
- Ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος έχει *σχετικό σφάλμα* της τάξης του $\epsilon(n)$ αν

$$\frac{|C - C^*|}{C^*} \leq \epsilon(n)$$

όπου, C είναι η λύση που επιστρέφει ο προσεγγιστικός αλγόριθμος και C^* είναι η βέλτιστη λύση.

- Θέλουμε να έχουμε προσεγγιστικούς αλγορίθμους με *σταθερό* σχετικό σφάλμα. (Για ορισμένα προβλήματα δεν υπάρχουν τέτοιοι αλγόριθμοι!)

Χρωματισμός Επίπεδων Γραφημάτων

Δεδομένα: Επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$, $|E| \geq 1$ χωρίς βρόχους.

Ερώτηση: Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που χρειάζονται για να χρωματιστεί το γράφημα G;

Approx_Planar_Graph_Colouring(G)

• **return**("We need 3 colours")

• Αυτός είναι ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος σταθερού σχετικού σφάλματος.

  • Κάθε επίπεδο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα.
  • Αν $|E| \geq 1$, χρειαζόμαστε πάντα τουλάχιστον 2 χρώματα.

  $\implies \quad |C - C^*| \leq 1 \quad \implies \quad \frac{|C-C^*|}{C^*} \leq \frac{1}{2}$

• Το γράφημα G μπορεί να μην χρωματίζεται με 3 χρώματα!

Σημείωση Αυτό ήταν ένα τετριμμένο παράδειγμα! Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος για το *"minimum vertex cover"* που ακολουθεί θα σας πείσει ότι δεν είναι τόσο "εύκολη υπόθεση".