Χρωματισμός επίπεδων γραφημάτων

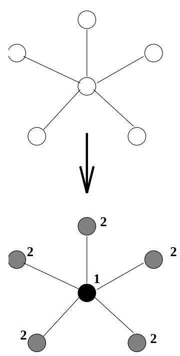
Χρωματισμός γραφημάτων (Graph colouring)

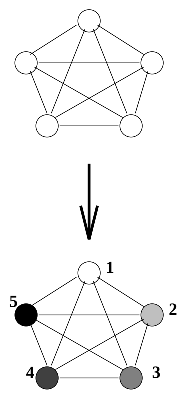
Είσοδος: Ένα γράφημα $G = (V, E)$

Έξοδος: Ένας χρωματισμός των κόμβων του G τέτοιος ώστε γειτονικοί κόμβοι να έχουν διαφορετικά χρώματα.

- Ενδιαφερόμαστε για χρωματισμούς που χρησιμοποιούν το μικρότερο δυνατό πλήθος χρωμάτων.

Παραδείγματα





- Όλοι οι επιτρεπτοί χρωματισμοί του K_m απαιτούν m χρώματα.

Θεώρημα Ένα γράφημα $G = (V, E)$ μέγιστου βαθμού d μπορεί να χρωματιστεί με $d + 1$ χρώματα.

Απόδειξη Παραθέτουμε έναν αλγόριθμο που χρωματίζει το G με $d + 1$ χρώματα.

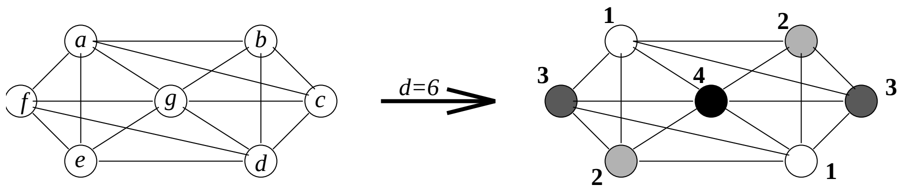
$(d + 1)\_Coloring(G)$

1. **for** each vertex $v \in V$ **do**
   $v =$"uncoloured"
2. **for** each vertex $v \in V$ **do**
   - find a colour c that is not used by any neighbor of v
   - $colour[v] = c$

Απόδειξη ορθότητας Το βήμα 2 σίγουρα θα βρει έναν επιτρεπτό χρωματισμό για τον v αφού, στην χειρότερη περίπτωση όπου όλοι οι γείτονες του v έχουν χρωματιστεί με διαφορετικά χρώματα, υπάρχει ακόμα ένα χρώμα διαθέσιμο για τον v.

$\square$

Παράδειγμα



Τρέχουσα κορυφή	Χρώματα γειτόνων	Χρώμα κορυφής
a	–	1
b	1	2
c	1, 2	3
d	2, 3	1
e	1	2
f	1, 2	3
g	1, 2, 3	4

Παρατηρούμε ότι, ενώ το θεώρημα εγγυάται ότι μπορούμε να βρούμε έναν χρωματισμό με 7 χρώματα, χρησιμοποιήσαμε λιγότερα. Η σειρά με την οποία χρωματίζουμε τις κορυφές είναι σημαντική.

Θεώρημα Κάθε επίπεδο γράφημα G έχει έναν κόμβο βαθμού μικρότερου ή ίσου με 5.

Απόδειξη

- Κατασκευάζοντας το face-edge incidence graph H έχουμε (όπως παραπάνω):

  $f \leq \frac{2|E|}{3}$ (1)

- Έστω ότι ο βαθμός όλων των κόμβων είναι ≥ 6. Τότε,

  $2|E| \geq 6|V| \implies |V| \leq \frac{|E|}{3}$ (2)

- Ο τύπος του Euler: $|V| - |E| + f = 2$ (3)

$$(3) \overset{1,2}{\implies} 2 \leq \frac{|E|}{3} - |E| + \frac{2|E|}{3} \Leftrightarrow 2 \leq 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Συνεπώς, κάθε επίπεδο γράφημα περιέχει έναν κόμβο με βαθμό το πολύ 5.

□

Θεώρημα Κάθε επίπεδο γράφημα G μπορεί να χρωματιστεί με 6 χρώματα.

Απόδειξη Παραθέτουμε έναν αλγόριθμο που δίνει έναν τέτοιο χρωματισμό.

$Planar\_6\_Coloring(G)$

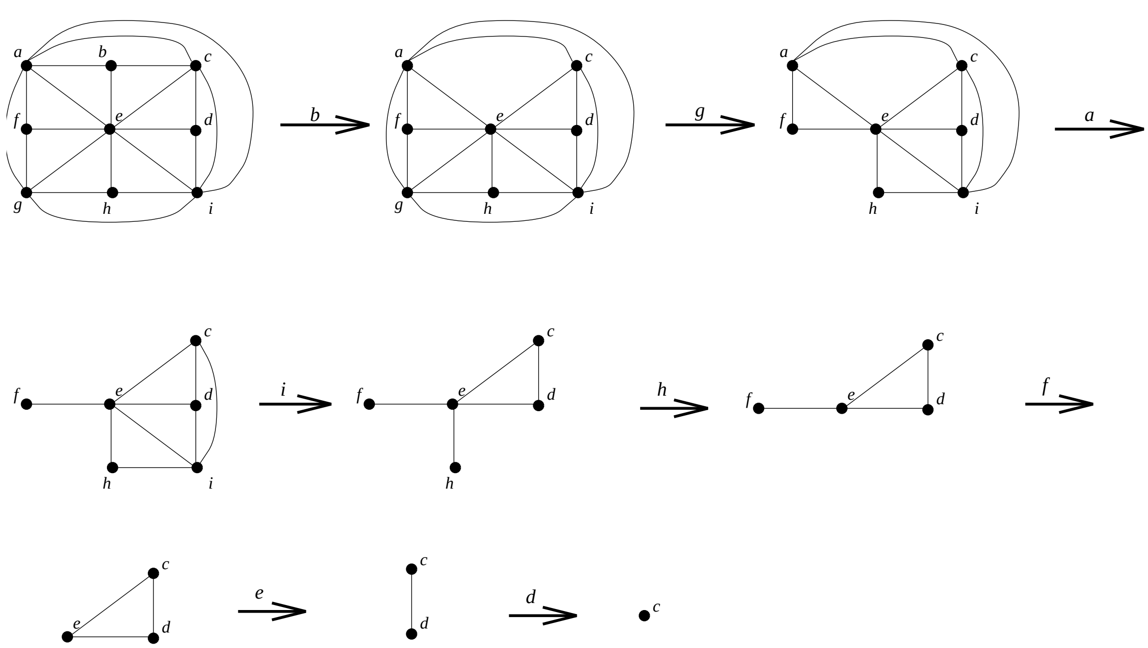
1. Let all vertices of G be "uncoloured".
2. Pick a vertex $v \in V$ such that $degree(v) \leq 5$.
3. Construct a new graph H from G by removing v and its adjacent edges.
4. $Planar\_6\_Coloring(H)$
5. Colour vertex v with a valid colour.

Ανάλυση χρόνου $O(V + E) = O(V)$

Απόδειξη ορθότητας: Εφόσον ο v έχει το πολύ 5 γείτονες και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μέχρι 6 χρώματα, μπορούμε πάντα να βρούμε ένα επιτρεπτό χρώμα για τον v.

□

Παράδειγμα



Παράδειγμα (συνέχεια)

Τώρα, χρωματίζουμε τις κορυφές με την ανάποδη σειρά με την οποία 'διαγράφηκαν'.

Vertex	Colours of neighbores	Assigned colour
c	–	1
d	1	2
e	1, 2	3
f	3	1
h	3	1
i	1, 2, 3	4
a	1, 3	2
g	1, 2, 3, 4	5
b	1, 2, 3	4

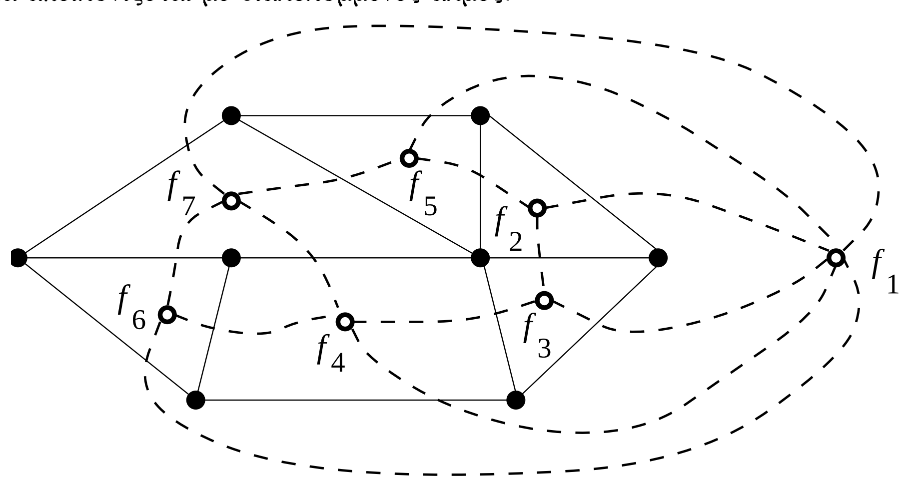
Το δυικό γράφημα (dual) ενός επίπεδου γραφήματος

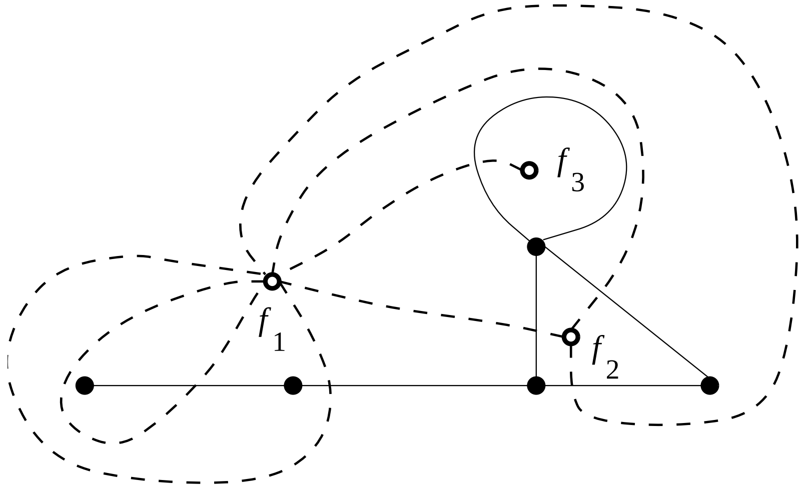
Ορισμός Το *δυικό γράφημα* ενός **επίπεδου** γραφήματος $G = (V, E)$, συμβολίζεται με $G^d = (V^d, E^d)$, και κατασκευάζεται ως εξής:

$$V^d = \{v_i^d \mid f_i \text{ is a face of } G\}$$

$$E^d = \{e_j^d = (v_i, v_k) \mid e_j \in E \text{ and } e_j \text{ is between faces } f_i \text{ and } f_k\}$$

Παραδείγματα Το αρχικό γράφημα απεικονίζεται με συνεχείς ακμές. Το δυικό γράφημα απεικονίζεται με διακεκομμένες ακμές.





- Το δυικό γράφημα ενός επίπεδου γραφήματος είναι επίσης επίπεδο γράφημα.
- $(G^d)^d = G$

Εφαρμογή Χρωματισμός ενός γεωγραφικού χάρτη με 6 χρώματα.

Λύση

$Map\_6\_Coloring(G)$

1. Let G be the plane graph representing the map.
2. Construct the dual G^d of G.
3. $Planar\_6\_Coloring(G^d)$

Ανάλυση χρόνου $O(V)$

Θεώρημα Κάθε επίπεδο γράφημα είναι 4-χρωματίσιμο.

□