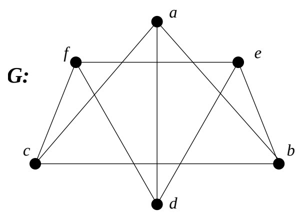
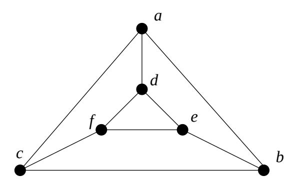
Επίπεδα γραφήματα (Planar graphs)

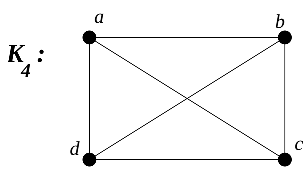
Ορισμός Ένα γράφημα G είναι *επίπεδο (planar)* εάν μπορεί να απεικονιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.

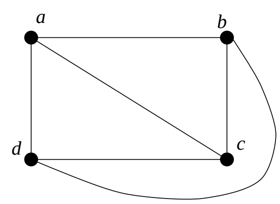
Παραδείγματα





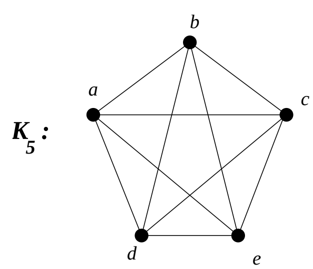
Μια *επίπεδη απεικόνιση* του G.



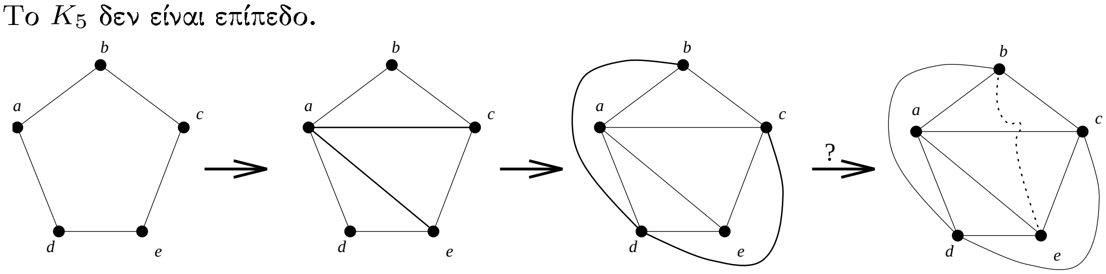


Μία *επίπεδη απεικόνιση* του K_4.
Το K_4 είναι επίπεδο $\Longrightarrow$ τα K_3 και K_2 είναι επίσης επίπεδα.

<u>Το γράφημα K_5</u>



- Το K_5 δεν είναι επίπεδο.

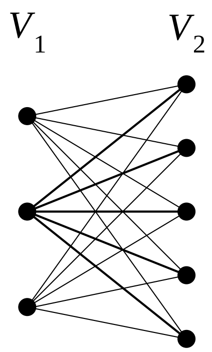


Το K_5 δεν είναι επίπεδο $\Longrightarrow$ Το $K_m,\ m \geq 5$ δεν είναι επίπεδο.

Ορισμός Ένα *πλήρες διμερές γράφημα (complete bipartite graph)* $K_{m,n}$ είναι ένα διμερές γράφημα $G = (V_1, V_2, E)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $|V_1| = m$
2. $|V_2| = n$
3. $degree(v) = \begin{cases} m & \text{αν } v \in V_2 \\ n & \text{αν } v \in V_1 \end{cases}$

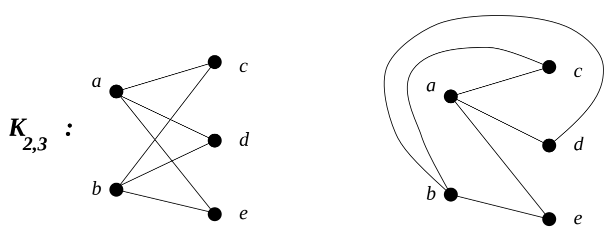
Παράδειγμα $K_{3,5}$



$|E(K_{m,n})| = mn$

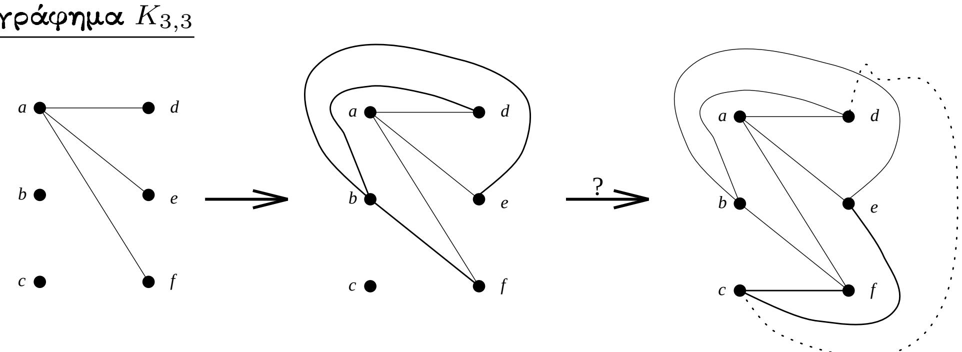
$|E(K_{3,5})| = 3 \cdot 5 = 15$

- **Ας δούμε το $K_{2,3}$**



Μία επίπεδη απεικόνιση του $K_{2,3}$.

Το γράφημα $K_{3,3}$

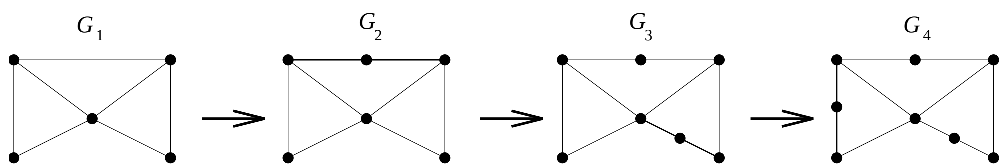


Δεν υπάρχει τρόπος να σχεδιαστεί η ακμή (c, d) χωρίς να τέμνει κάποια άλλη ακμή. Συνεπώς, το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Το $\Longrightarrow \quad K_{m,n},\ m \geq 3,\ n \geq 3$ δεν είναι επίπεδο.

Ορισμός Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς βρόχους, όπου $|E| \neq 0$. Μία ***στοιχειώδης υποδιαίρεση*** *(elementary subdivision)* του G προκύπτει όταν αφαιρεθεί μία ακμή (u, w) του G και αντικατασταθεί με τις ακμές (u, v) και (v, w), όπου v είναι ένας νέος κόμβος.

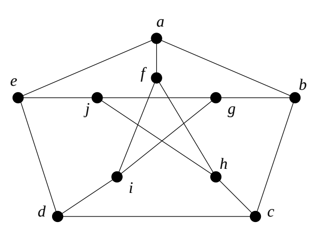
Παράδειγμα



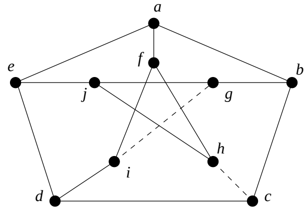
Το G_4 μπορεί να προκύψει από το G_1 με μια αλληλουχία από 3 στοιχειώδεις υποδιαιρέσεις.

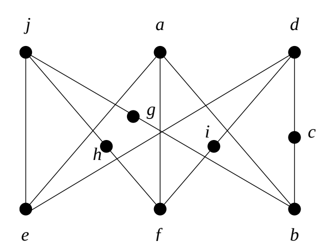
Θεώρημα (Kuratowski's theorem) Ένα γράφημα είναι μη επίπεδο αν και μόνο αν περιέχει ένα υπογράφημα το οποίο μπορεί να προκύψει από το K_5 ή το $K_{3,3}$ με μια ακολουθία από στοιχειώδεις υποδιαιρέσεις.

<u>Το γράφημα του Petersen</u>



Απεικονίζουμε εκ νέου το γράφημα που παράγεται από τις συνεχείς ακμές:





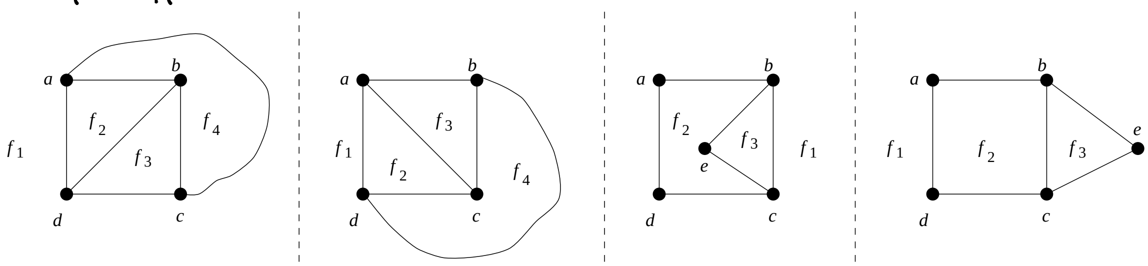
Αυτό το γράφημα προκύπτει από το $K_{3,3}$ με μία αλληλουχία από 4 υποδιαιρέσεις.

$\Longrightarrow$ Το γράφημα του Petersen δεν είναι επίπεδο.

Έστω μια επίπεδη απεικόνιση ενός επίπεδου γραφήματος G.

Ορισμός Μία *περιοχή (face)* του G ορίζεται ως μια περιοχή του επιπέδου που οριοθετείται από ακμές, έτσι ώστε οποιαδήποτε δύο σημεία στην περιοχή μπορούν να συνδεθούν με μία συνεχή καμπύλη που δεν συναντά καμία ακμή και κανέναν κόμβο.

Παραδείγματα

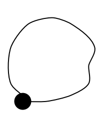


Θεώρημα (Euler's theorem) Έστω $G = (V, E)$ ένα συνδεδεμένο επίπεδο γράφημα. Έστω f το πλήθος των περιοχών του G. Τότε,

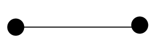
$$|V| - |E| + f = 2$$

Απόδειξη (Με επαγωγή στο $|E|$.)

- **Βάση** Αν $|E| = 1$, τότε το G είναι ένα από τα παρακάτω δύο γραφήματα:

(a) 

Για το (α) έχουμε: $|V| = 1,\ f = 2 \implies 1-1+2 = 2.\ \surd$

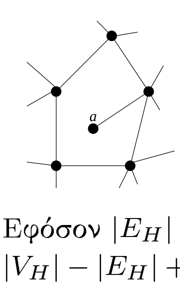
(b) 

Για το (β) έχουμε: $|V| = 2,\ f = 1 \implies 2-1+1 = 2.\ \surd$

- **Επαγωγικό βήμα** Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε συνδεδεμένο γράφημα με k ακμές. Έστω G συνδεδεμένο επίπεδο γράφημα με $|V|$ κόμβους, f περιοχές και $|E| = k + 1$ ακμές.

Θα δείξουμε ότι η σχέση $|V| - |E| + f = 2$ ισχύει για το G.

<u>Περίπτωση 1: το G περιέχει έναν κόμβο a βαθμού 1</u>

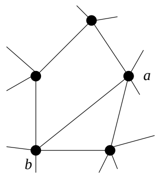


Έστω H το γράφημα που προκύπτει διαγράφοντας τον a και την ακμή που απολήγει σ' αυτόν από το G.

- Το H έχει ακόμα f περιοχές.
- $|V_H| = |V| - 1$
- $|E_H| = |E| - 1$

Εφόσον $|E_H| = k$, ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς,
$|V_H| - |E_H| + f = 2 \implies |V| - 1 - |E| + 1 + f = 2 \implies |V| - |E| + f = 2$

Περίπτωση 2: το G δεν περιέχει κόμβο βαθμού 1



Έστω $H(V_H, E_H)$ το γράφημα που προκύπτει διαγράφοντας μια οποιαδήποτε ακμή (a, b) από το G.

- Το H έχει $f-1$ περιοχές.
- $|V_H| = |V|$
- $|E_H| = |E| - 1$

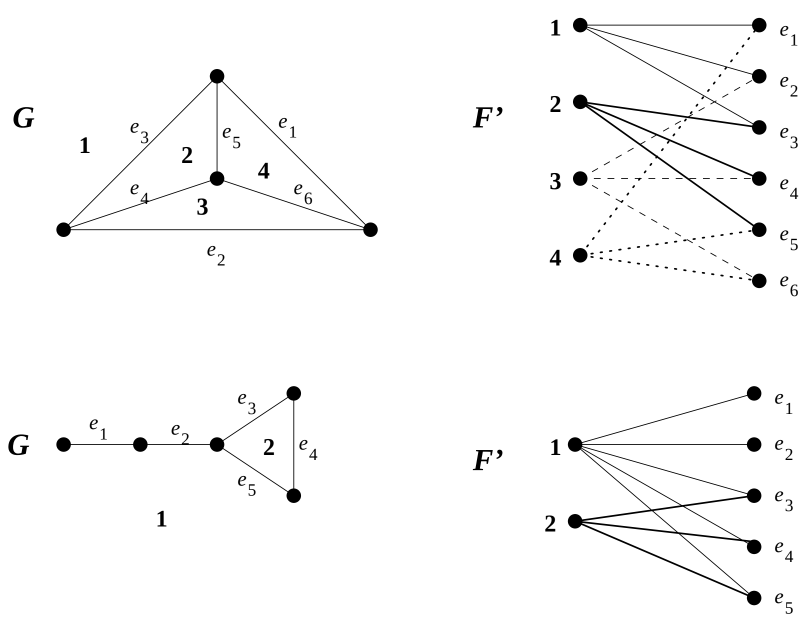
Επειδή $|E_H| = k$, ισχύει η επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς,
$|V_H| - |E_H| + f = 2 \implies |V| - |E| + 1 + f - 1 = 2 \implies$
$\implies \quad |V| - |E| + f = 2$

$\square$

Ορισμός Δοθέντος μιας επίπεδης απεικόνισης ενός επίπεδου γραφήματος $G = (V, E)$ το οποίο έχει f περιοχές, το *face-edge incidence graph* $F(V', E')$ για το G κατασκευάζεται ως εξής:

–$V' = \{v_i \mid 1 \leq i \leq f\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq |E(G)|\}$
–$E' = \{(v_i, u_j) \mid j$ είναι ακμή στο σύνορο της περιοχής $i\}$

Παραδείγματα

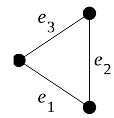


Θεώρημα Για κάθε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$, $|E| \geq 3$, ισχύει ότι $|E| \leq 3|V| - 6$.

Απόδειξη

- Έστω ότι το G έχει f περιοχές. Κατασκευάζουμε το face-edge incident graph H για το G.

- Εφόσον κάθε περιοχή πρέπει να γειτνιάζει με *τουλάχιστον* 3 ακμές, $\implies \quad |E_H| \geq 3f \quad (1)$



- Εφόσον κάθε ακμή μπορεί να γειτνιάζει *το πολύ* με 2 περιοχές, $\implies \quad |E_H| \leq 2|E| \quad (2)$

- $(1), (2) \implies \quad 2|E| \geq 3f \quad \implies \quad f \leq \frac{2|E|}{3} \quad (3)$

- Από τον τύπο του Euler έχουμε ότι $|V| - |E| + f = 2 \implies$

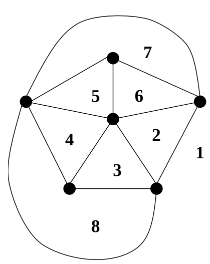
$$\implies \quad |E| = f + |V| - 2 \quad \stackrel{(3)}{\implies} \quad |E| \leq \frac{2|E|}{3} + |V| - 2 \quad \implies$$

$$\implies \quad 3|E| \leq 2|E| + 3|V| - 6 \quad \implies \quad |E| \leq 3|V| - 6$$

□

- Η ισότητα στην $|E| \leq 3|V| - 6$ ισχύει όταν όλες οι περιοχές είναι τρίγωνα (*planar triangulated graphs*).

Παράδειγμα



$|E| = 12$
$|V| = 6$
$f = 8$

$|E| = 3|V| - 6 \leftrightarrow 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 12\surd$

- Η σχέση $|E| \leq 3|V| - 6$ είναι πολύ σημαντική!

  Μία άμεση συνέπεια είναι ότι η ανάλυση χρόνου όλων των αλγορίθμων που περιέχουν το E στην πολυπλοκότητά τους μπορούν να βελτιωθούν.

  - **Για επίπεδα γραφήματα:**

    Κατά βάθος διαπέραση: $O(V)$

    Κατά πλάτος διαπέραση: $O(V)$

    Bellman-Ford: $O(V^2)$

    Edmonds-Karp: $O(V^3)$

    κλπ ...

Θεώρημα Το K_5 δεν είναι επίπεδο.

Απόδειξη

- Το K_5 έχει 5 κόμβους και $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ακμές.
- Αν το K_5 ήταν επίπεδο θα είχαμε ότι:

$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 10 \leq 9$ που είναι **άτοπο.**

□

Ερώτηση Μπορούμε να δείξουμε με τον ίδιο τρόπο ότι το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο;

Θεώρημα Για οποιοδήποτε επίπεδο διμερές γράφημα G ισχύει ότι $|E| \leq 2|V| - 4$.

Απόδειξη

- Έστω ότι το G έχει f περιοχές. Κατασκευάζουμε το face-edge incident graph H για το G.

- Σε ένα διμερές επίπεδο γράφημα κάθε περιοχή είναι γειτονική τουλάχιστον με 4 ακμές.

$\implies \quad |E_H| \geq 4f \quad\quad (1)$

- Εφόσον κάθε ακμή μπορεί να είναι γειτονική *το πολύ* με 2 περιοχές,

$\implies \quad |E_H| \leq 2|E| \quad\quad (2)$

- (1), (2) $\implies \quad 2|E| \geq 4f \quad \implies \quad f \leq \frac{|E|}{2} \quad\quad (3)$

- Από τον τύπο του Euler έχουμε ότι $|V| - |E| + f = 2 \implies$

$\implies \quad |E| = f + |V| - 2 \quad \overset{(3)}{\implies} \quad |E| \leq \frac{|E|}{2} + |V| - 2 \quad \implies$

$\implies \quad 2|E| \leq |E| + 2|V| - 4 \quad \implies \quad |E| \leq 2|V| - 4$

□

Άσκηση Δείξτε ότι το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.