Τομές δικτύων ροής (cut)

Συμβολισμός Έστω f μία ροή σε ένα δίκτυο ροής $G = (V, E)$ και $X,\ Y \subseteq V$.

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$$

Λήμμα

1. $f(X, X) = 0, \qquad X \subseteq V$
2. $f(X, Y) = -f(Y, X), \qquad X,\ Y \subseteq V$
3. $\begin{array}{l} f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z) \\ f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y) \end{array} \qquad X,\ Y,\ Z \subseteq V,\ \ X \cap Y = \emptyset$

$\square$

Λήμμα Έστω $G = (V, E)$ δίκτυο ροής με πηγή s και προορισμό t και έστω f μία ροή στο G. Έστω G_f το υπολειμματικό δίκτυο ως προς την f, και f' μια ροή στο G_f. Τότε, $f + f'$ είναι ροή στο G με τιμή $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Απόδειξη $(f + f')(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(u, v) + f'(u, v)$

1. Αντισυμμετρία

$$\begin{aligned} (f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \\ &= -f(v, u) - f'(v, u) \\ &= -\left(f(v, u) + f'(v, u)\right) \\ &= -(f + f')(v, u) \end{aligned}$$

2. Περιορισμός χωρητικότητας

$$\begin{aligned} (f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \\ &\leq f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) \\ &= c(u, v) \end{aligned}$$

Σημείωση: $f'(u, v) \leq c_f(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} c(u, v) - f(u, v)$

3. Διατήρηση ροής

Για κάθε $u \in V - \{s, t\}$,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{v \in V}(f + f')(u, v) &= \textstyle\sum_{v \in V} f(u, v) \;+\; \sum_{v \in V} f'(u, v) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Η τιμή της καινούριας ροής

$$\begin{aligned} |f + f'| &= \textstyle\sum_{v \in V}(f + f')(s, v) \\ &= \textstyle\sum_{v \in V} f(s, v) \;+\; \sum_{v \in V} f'(s, v) \\ &= |f| + |f'| \end{aligned}$$

$\square$

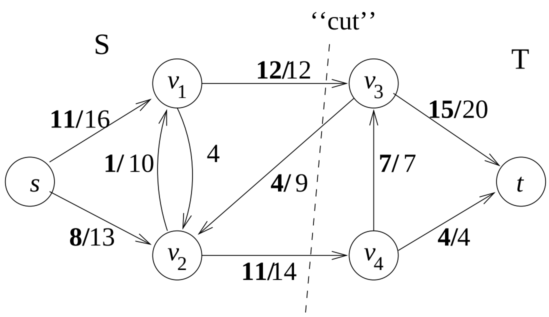
Ορισμοί

- Μία *τομή (cut)* (S, T) του δικτύου ροής $G = (V, E)$ αποτελεί μια διαμέριση του V σε S και $T = V - S$ τέτοια ώστε $s \in S$ και $t \in T$.

- Η *χωρητικότητα (capacity) μιας τομής* (S, T), $c(S, Y)$, ορίζεται ως:

$$c(S, T) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x, y)$$

Παράδειγμα



- $f(S, T) \;=\; f(v_1, v_3) + f(v_2, v_4) + f(v_2, v_3) \;=\; 12 + 11 + (-4) \;=\; 19$
- $c(S, T) \;=\; c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) \;=\; 12 + 14 \;=\; 26$

Λήμμα Έστω f μια ροή σε δίκτυο ροής G και έστω (S,T) μια "τομή"του G. Τότε,

$$f(S,T) = |f|$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) - 0 \\ &= f(s,V) + f(S-\{s\},V) \\ &= f(s,V) \\ &= |f| \end{aligned}$$

□

Λήμμα Η τιμή μιας οποιασδήποτε ροής f σε δίκτυο ροής G είναι *άνω φραγμένη* από την χωρητικότητα οποιασδήποτε "τομής"του G.

Απόδειξη

Έστω (S,T) μια τυχαία "τομή"του G και έστω f οποιαδήποτε ροή.

Από το προηγούμενο λήμμα,

$$\begin{aligned} |f| &= f(S,T) \\ &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \\ &\leq \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα *(Μέγιστης ροής - ελάχιστης τομής Max-Flow Min-Cut Theorem)*
Αν f είναι μια ροή στο δίκτυο ροής$G = (V, E)$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Η f είναι μια μέγιστη ροή στο G.
2. Το υπολειμματικό δίκτυο G_f δεν περιέχει επαυξάνοντα μονοπάτια.
3. $|f| = c(S, T)$ για κάποια "τομή"(S, T) του G.

Απόδειξη

(1) $\Longrightarrow$ (2) (Με άτοπο)

Έστω ότι η f είναι μέγιστη ροή και ότι το G_f **περιέχει** το επαυξάνων μονοπάτι p (με ροή f_p). Τότε,

$$|f + f_p| \;=\; |f| + |f_p| \;>\; |f|$$

άτοπο εφόσον η f είναι μια μέγιστη ροή.

(2) $\Longrightarrow$ (3)

- "Το G_f δεν περιέχει επαυξάνοντα μονοπάτια" $\equiv$ "$\neg\exists$ μονοπάτι από τον s στον t"
- Ορίζουμε $S = \{v : \; v$ υπάρχει μονοπάτι από τον $s\}$
  και $\quad T = V - S$
- Η (S, T) αποτελεί "τομή". Συνεπώς,
  "για κάθε (u, v) τέτοιο ώστε $u \in S, \; v \in T$ έχουμε ότι $f(u, v) = c(u, v)$"
  $\Longrightarrow \; |f| = f(S, T) = c(S, t)$

(3) $\Longrightarrow$ (1)

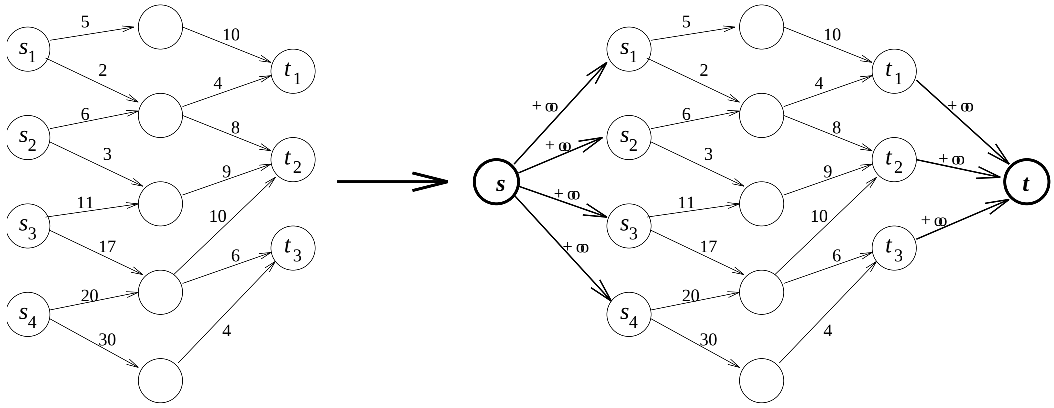
- $|f| \leq c(S, T)$ για όλες τις "τομές"(S, T) (Να δειχθεί ως άσκηση)

Συνεπώς, το γεγονός ότι $|f| = c(S, T)$ για κάποια "τομή"(S, T) συνεπάγεται ότι η f είναι μέγιστη.

$\square$

Δίκτυα με πολλαπλές πηγές και προορισμούς

- Ανάγεται σε πρόβλημα μέγιστης ροής με μία μόνο πηγή και έναν μόνο προορισμό.



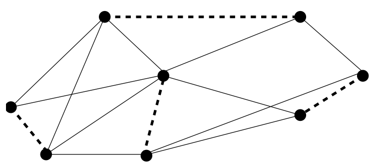
- Στην πράξη, αντί για $+\infty$ μπορούμε να θέσουμε την χωρητικότητα των καινούριων ακμών ίση με $c > \sum_{e \in E} c(e)$.

Μέγιστο διμερές ταίριασμα

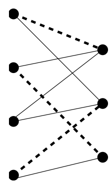
Ορισμοί

- Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$. Ένα *ταίριασμα (matching)* M είναι ένα υποσύνολο ακμών, $M \subseteq E$, τέτοιο ώστε για κάθε κορυφή $v \in V$, το πολύ μία ακμή του M να απολήγει στον v.

Παράδειγμα

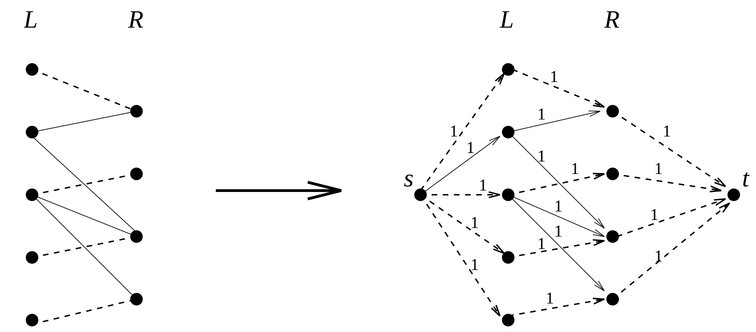


- Ένα *μέγιστο ταίριασμα (maximum matching)* είναι ένα ταίριασμα μέγιστης πληθικότητας.
- Ένα *μέγιστο διμερές ταίριασμα (maximum bipartite matching)* είναι ένα μέγιστο ταίριασμα σε ένα διμερές γράφημα. (Πολύ χρήσιμο σε προβλήματα χρονοδιαγραμμάτων.)



- Μέγιστο διμερές ταίριασμα $\propto$ Μέγιστη ακέραια ροή.
- Για δοθέν διμερές γράφημα $G = (L, R, E)$ κατασκευάζουμε ένα δίκτυο ροής $G' = (V', E')$ ως εξής:
  - $V' = L \cup R \cup \{s, t\}$
  - $E' = \{(s, u) : \ u \in L\} \ \cup \ \{(u, v) : \ u \in L, \ v \in R, \ (u, v) \in E\} \ \cup \ \{(v, t) : \ v \in R\}$
  - $c(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{για κάθε } (u, v) \in E' \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Παράδειγμα



Ανάλυση Χρόνου: $O(VE)$
Γιατί:

1. Ένα μέγιστο ταίριασμα οποιουδήποτε γραφήματος έχει πληθικότητα $O(V)$.
2. Η πολυπλοκότητα του $Ford\_Fulkerson()$ αλγορίθμου είναι $O(E|f^*|)$, όπου f^* είναι η μέγιστη ροή.