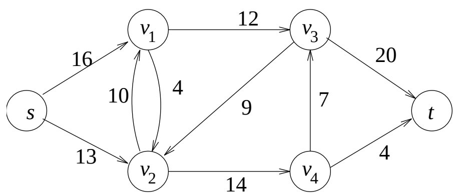
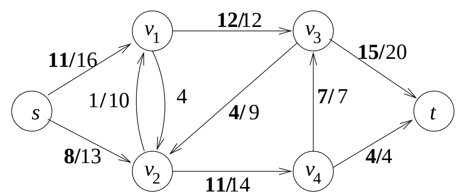
Μεγιστη ροή (Maximum Flow)

- Δίνεται ένα *δίκτυο ροής*, μία κορυφή κόμβος -*πηγή* s, και μία κορυφή -*προορισμός* t. Θέλουμε να υπολογίσουμε την μέγιστη ποσότητα από κάποιο εμπόρευμα/αγαθό που μπορεί να ρεύσει από την πηγή s προς τον προορισμό t χωρίς να γίνεται υπέρβαση της *χωρητικότητας* -ροής (*flow capacity*) των ακμών του δικτύου.

Παράδειγματα



Ένα δίκτυο ροής.



Μια ροή f με $|f| = 19$.

Εφαρμογές

- Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε:
  1. Την ροή υγρών μέσα σε αγωγούς.
  2. Την διαδρομή των συσκευών/ ανταλλακτικών σε μία γραμμή παραγωγής (assembly line).
  3. Δίκτυα ηλεκτρισμού.
  4. Δίκτυα επικοινωνίας/ μεταφορών.

- Πολλά άλλα προβλήματα τα οποία, με μία πρώτη μάτια, φαίνονται άσχετα με το πρόβλημα μέγιστης ροής μπορεί να αναχθούν σε αυτό (π.χ., *μέγιστο ταίριασμα σε διμερές γράφημα* (*maximal bipartite matching*)).

Δίκτυα ροής και ροές

- Ένα *δίκτυο ροής* $G = (V, E)$ είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο η κάθε ακμή $(u, v) \in E$ έχει μία μη-αρνητική ***χωρητικότητα*** *(capacity)*$c(u, v) \geq 0$. Εάν $(u, v) \notin E$ τότε $c(u, v) = 0$.

- Υπάρχουν 2 διακεκριμένες κορυφές: Μία *πηγή (source)* s και ένας *προορισμός (sink)* t.

  Υποθέτουμε ότι κάθε κορυφή $v \in V - \{s, t\}$ ανήκει σε ένα μονοπάτι από την s προς την t.

  $\Longrightarrow$ $|E| \geq |V| - 1$ (το γράφημα είναι συνδεδεμένο (connected)).

- Μία *ροή στο* G είναι μία συνάρτηση πραγματικών τιμών $f: V \times V \longrightarrow \Re$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

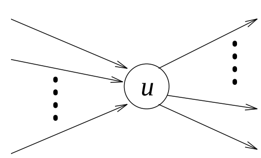
  1. ***Περιορισμός χωρητικότητας:*** $\forall\ u, v \in V, \quad f(u, v) \leq c(u, v)$. (*Capacity contstraint*)

  2. ***Περιορισμός ασυμμετρίας:*** $\forall\ u, v \in V, \quad f(u, v) = -f(v, u)$. (*Skew constraint*)

  3. *Διατήρηση ροής:* $\forall\ u \in V - \{s, t\}, \quad \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$. (*Flow conservation*)

Διατήρηση της ροής

- Για κάθε $u \in V - \{s, t\}$ απαιτούμε $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

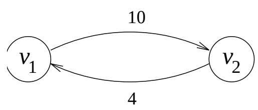


  - Η ροή που εισέρχεται σε μία κορυφή είναι ίση με την ροή που εξέρχεται από αυτή.
  - Η ροή για όλες τις εξερχόμενες ακμές είναι μη-αρνητική ενώ η ροή για όλες τις εισερχόμενες ακμές είναι μη-θετική.
  - Η ποσότητα $f(u, v)$ ονομάζεται *ροή από την κορυφή* u *προς την κορυφή* v.

- Η ***τιμή*** της ροής f ορίζεται ως:

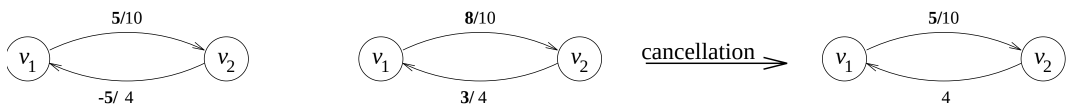
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) \qquad \left[= \sum_{v \in V} f(v, t) \right]$$

Πως να διαχειριστούμε τις ροές - «Ακύρωση»

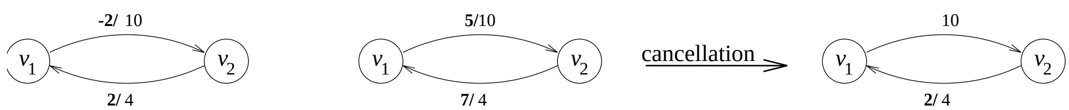


- Αποστολή 8 μονάδων από την $v_1 \longrightarrow v_2$.

- Αποστολή 3 μονάδων από την $v_2 \longrightarrow v_1$.



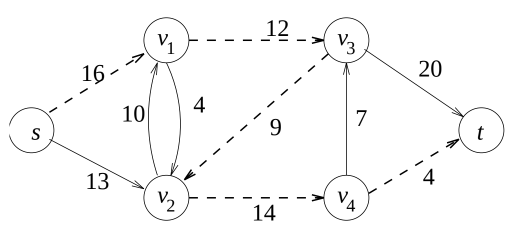
- Αποστολή 7 μονάδων από την $v_2 \longrightarrow v_1$.



Η μέθοδος των Ford-Fulkerson

Ορισμός Ένα *επαυξάνων μονοπάτι (augmenting path)* είναι ένα μονοπάτι από την πηγή s προς τον προορισμό t κατά μήκος του οποίου μπορούμε να προωθήσουμε επιπρόσθετη ροή, και επομένως, να *αυξήσουμε την ροή κατά μήκος του μονοπατιού.*

Παράδειγμα



$Ford\_Fulkerson\_Method(G, s, t)$

1. Initialize flow f to 0
2. **while** there exists an augmenting path p
3.   **do** augment flow f along p
4. **return** f

Υπολειμματικά δίκτυα (Residual networks)

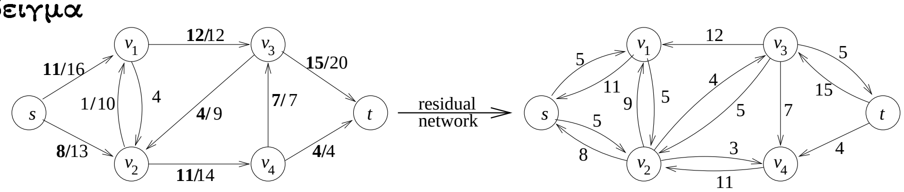
- Έστω f μία ροή στο G και ένα ζεύγος κορυφών $u,\ v\ \in V$. Η ποσότητα της επιπρόσθετης ροής που μπορεί να προωθηθεί από την u προς την v χωρίς να παραβιαστεί η χωρητικότητα $c(u,v)$ ονομάζεται ***υπολείπουσα χωρητικότητα*** *(residual capacity)* $c_f(u,v)$ της (u,v).

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Σημείωση: $c_f(u,v) \geq 0$ για κάθε $u,\ v\ \in V$

- Με δεδομένο ένα δίκτυο ροής $G = (V,E)$ και μία ροή f, το ***υπολειμματικό δίκτυο του*** G ***το οποίο προκύπτει από την*** f είναι το $G_f = (V, E_f)$ όπου $E_f = \{(u,v) :\ c_f(u,v) > 0\}$.

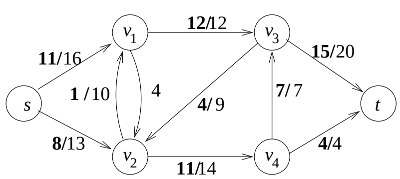
Παράδειγμα



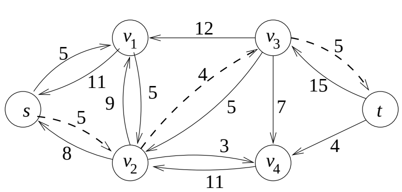
Παρατήρηση $|E_f| \leq 2|E|$

Διότι η ακμή (u,v) ανήκει στο E_f εάν τουλάχιστον μία από τις (u,v) ή (v,u) ανήκει στο E.

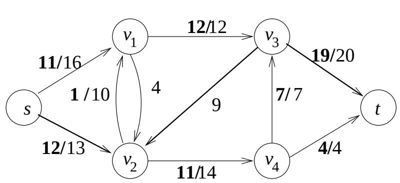
Παράδειγμα (Μία επανάληψη της $Ford\_Fulkerson\_Method$)



$\longleftarrow$ Ροή f στο G.



$\longleftarrow$ G_f και ένα επαυξάνων μονοπάτι p.



$\longleftarrow$ Η ροή στο G μετά την αύξησή της κατά μήκος του p.

- Έστω ένα επαυξάνων μονοπάτι p. Η μέγιστη ποσότητα ροής που μπορούμε να προωθήσουμε κατά μήκος των ακμών του p ονομάζεται *υπολείπουσα χωρητικότητα (residual capacity)* **του** p.

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : \ (u,v) \in p\}$$

$Ford\_Fulkerson(G, s, t)$

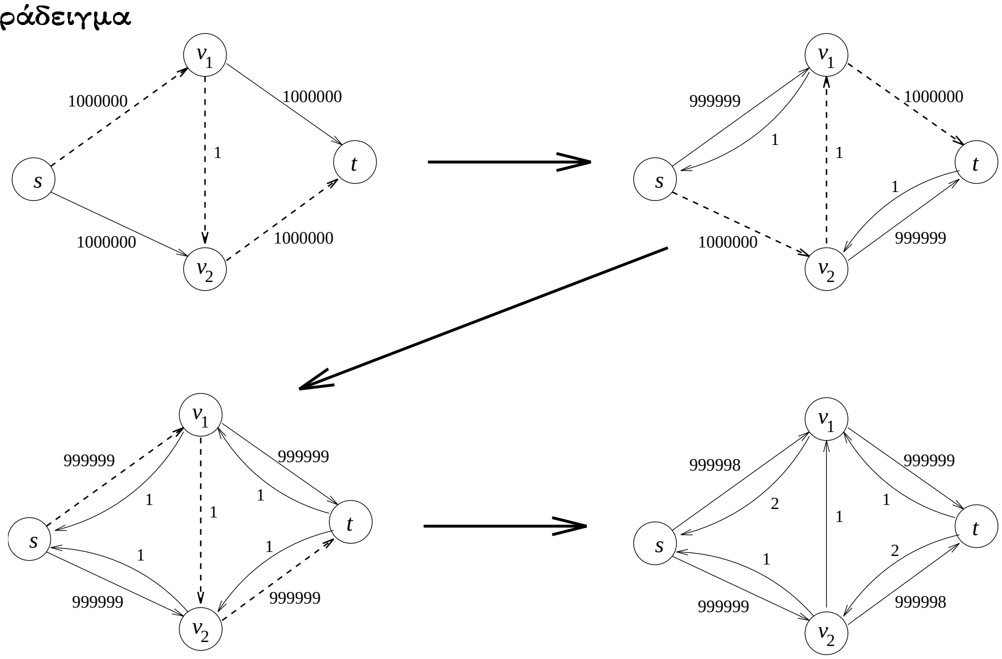
```
for each edge (u, v) ∈ E
    do f[u, v] = 0
       f[v, u] = 0
while there exists a path p from s to t in G_f
    do c_f(p) = min{c_f(u, v) : (u, v) ∈ p}
       for each edge (u, v) in p
           do f[u, v] = f[u, v] + c_f(p)
              f[v, u] = −f[u, v]
```

Χρονική πολυπλοκότητα

- Εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο επιλέγουμε τα επαυξάνοντα μονοπάτια.
- Ο αλγόριθμος μπορεί να μην τερματίσει.
- Εάν οι χωρητικότητες είναι **ακέραιες** ο αλγόριθμος πάντοτε τερματίζει.

- Ένα άνω όριο για τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης της μεθόδου $Ford\_Fulkerson()$ για ακέραιες χωρητικότητας είναι $O(E|f^*|)$ όπου f^* είναι η μέγιστη ροή που επιστρέφει ο αλγόριθμος.

Παράδειγμα



- Ένα επαυξάνων μονοπάτι μπορεί να υπολογιστεί σε $O(E)$ χρόνο είτε με ***κατά βάθος διαπέραση*** *(depth first search)* ή με ***κατά πλάτος διαπέραση*** *(breadth first search)*.

- Η απόδειξη ορθότητας της μεθόδου Ford-Fulkerson προκύπτει από το θεώρημα:

Θεώρημα Εάν f είναι μία ροή στο δίκτυο ροής $G = (V, E)$ με πηγή s και προορισμό t, τότε οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η f είναι μία μέγιστη ροή στο G.
2. Το υπολειμματικό δίκτυο G_f δεν περιέχει επαυξάνοντα μονοπάτια.

Ο Edmonds_Karp αλγόριθμος

$Edmonds\_Karp(G, s, t)$

- Compute the flow as in $Ford\_Fulkerson()$.
- Use *breadth first search* to compute the augmenting paths.

Θεώρημα Ο *Edmonds_Karp* αλγόριθμος πραγματοποιεί $O(VE)$ επαυξήσεις ροής.

Χρονική πολυπλοκότητα: $O(VE^2)$
(Συνολικά $O(VE)$ κλήσεις για κατά πλάτος διαπέραση.)

Σημείωση Οι χωρητικότητες **πρέπει** να είναι ακέραιοι αριθμοί.