

Έλεγχος ακυκλικότητας γραφήματος (Graph Acyclicity Testing)

Είσοδος: Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.

Έξοδος: Περιέχει το G κύκλο;

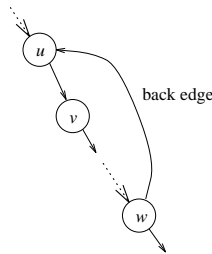
ACYCLICITY(G)

1. Εκτέλεσε τον αλγόριθμο $DFS(G)$ και κατηγοριοποίησε τις ακμές σε ακμές δένδρου, ακμές προς τα εμπρός, ακμές προς τα πίσω και ακμές προς τα πλάγια.
2. Εάν υπάρχει μία ακμή προς τα πίσω τότε το γράφημα G περιέχει κύκλο.

Πολυπλοκότητα: $O(V + E)$

Απόδειξη της ορθότητας

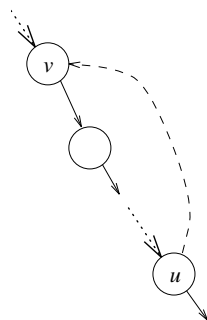
- Εάν το γράφημα G έχει μία ακμή προς τα πίσω τότε προφανώς περιέχει κύκλο.



$\implies \langle u, v, \dots, w, v \rangle$ είναι κύκλος.

Ισχυρισμός Εάν ένα κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει κύκλο, τότε μία ακμή προς τα πίσω θα εμφανιστεί σε οποιοδήποτε DFS του γραφήματος.

- Έστω ότι το γράφημα έχει κύκλο.
- Έστω v ο κόμβος με τον μικρότερο χρόνο ανακάλυψης (discovery time) $d[v]$ που ανήκει στο κύκλο.
- Θεωρούμε μία ακμή $u \rightarrow v$ σε κάποιο κύκλο που περιέχει τον v .



- Αφού ο κόμβος u ανήκει στον κύκλο, τότε ο u είναι απόγονος του v στο DFS δάσος. \implies Η ακμή $u \rightarrow v$ δεν είναι ακμή προς τα πλάγια.
- Αφού $d[v] < d[u] \implies$ Η ακμή $u \rightarrow v$ δεν είναι ακμή δένδρου ή ακμή προς τα εμπρός.
Άρα, η $u \rightarrow v$ είναι μία ακμή προς τα πίσω.

□

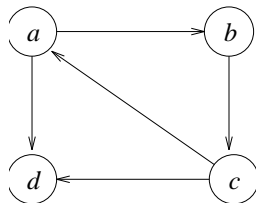
Ισχυρά συνδεδεμένα συστατικά

Ένα ισχυρά συνδεδεμένο συστατικό (*strongly connected component*) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα μη επεκτάσιμο (maximal) σύνολο κόμβων $U \subseteq V$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κόμβων u και v του U , υπάρχει ένα μονοπάτι από τον u προς τον v και ένα μονοπάτι από τον v στον u .

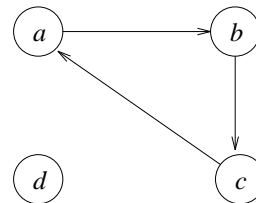
Είσοδος: Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.

Έξοδος: Τα ισχυρά συνδεδεμένα συστατικά του G .

Παράδειγμα



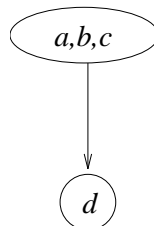
A directed graph



Its strongly connected components

- Κάθε κόμβος ενός κατευθυνόμενου γραφήματος ανήκει σε κάποιο ισχυρά συνδεδεμένο συστατικό, αλλά κάποιες ακμές του γραφήματος μπορεί να μην ανήκουν σε κανένα συστατικό. Τέτοιες ακμές ονομάζονται *μεταξύ συστατικών (cross-component) ακμές*.
- Μπορούμε να παραστήσουμε τις συνδέσεις μεταξύ των συστατικών κατασκευάζοντας ένα νέο γράφημα που ονομάζεται *αναγόμενο γράφημα συστατικών (reduced component graph)*.

Παράδειγμα (συνέχεια)



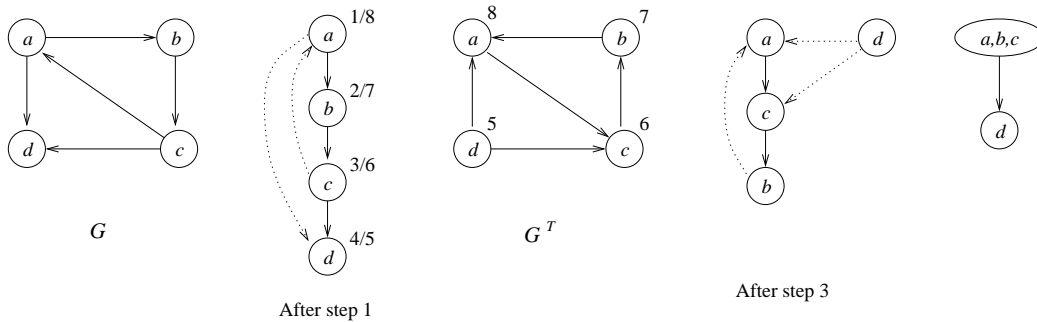
- Το αναγόμενο γράφημα είναι πάντοτε ακυκλικό.

STRONGLY_CONNECTED_COMPONENTS(G)

1. Εκτέλεσε τον αλγόριθμο $DFS(G)$ και υπολόγισε τους χρόνους ολοκλήρωσης της εξερεύνησης (finishing time) $f[u]$ για κάθε κόμβο u του G .
2. Υπολόγισε το ανάστροφο γράφημα G^T του G .
3. Εκτέλεσε τον αλγόριθμο $DFS(G^T)$, αλλά στην κεντρική ανακύκλωση του DFS θεώρησε τις κορυφές σε φθίνουσα τάξη του $f[]$ (όπως υπολογίστηκαν στο βήμα 1).
4. Οι κορυφές του κάθε δένδρου του DFS δάσους που παράχθηκε στο 3^ο βήμα αποτελούν τα ισχυρά συνδεδεμένα συστατικά του G .

Πολυπλοκότητα: $O(V + E)$

Παράδειγμα



Απόδειξη της ορθότητας

- Εάν v και w είναι δύο κόμβοι του ίδιου συστατικού, τότε υπάρχουν τα μονοπάτια:



- Πρέπει να δείξουμε ότι:

Οι v και w βρίσκονται στο ίδιο ισχυρά συνδεδεμένο συστατικό του G .

\iff

Οι v και w βρίσκονται στο ίδιο δένδρο του DFS -δάσους του G^T .

‘ \implies ’

- Ας υποθέσουμε ότι στο γράφημα G^T ξεκινάμε την αναζήτηση από κάποια ρίζα x και φτάνουμε στον v . Τότε, ο κόμβος w θα καταλήξει στο ίδιο δένδρο (αφού ο w είναι προσπελάσιμος από τον v).

‘ \Leftarrow ’ (Οι κόμβοι v και w βρίσκονται στο ίδιο δένδρο του DFS - δάσους του $G^T \implies$ Οι v και w βρίσκονται στο ίδιο ισχυρά συνδεδεμένο συστατικό του G .)

- Έστω x η ρίζα του δένδρου στο DFS -δάσος του G^T στο οποίο ανήκουν οι v και w .
 \implies Στο $G^T \exists$ ένα μονοπάτι $x \rightarrow v \implies$ Στο $G \exists$ ένα μονοπάτι $v \rightarrow x$.
- Στο G^T , όταν ανακαλύφθηκε η x , η κορυφή v δεν είχε ακόμη επισκευθεί.
 \implies Στο G , $f[x] > f[v]$.
 \implies Στην εξερεύνηση του G , ανακαλύπτουμε τον v κατά την εξερεύνηση από τον x .
 \implies Η κορυφή v είναι απόγονος της x στο DFS -δάσος του G .
 \implies Στο $G \exists$ ένα μονοπάτι $x \rightarrow v$. \implies Οι x και v βρίσκονται στο ίδιο ισχυρά συνδεδεμένο συστατικό.
- Όμοια αποδεικνύουμε ότι οι x και w βρίσκονται στο ίδιο ισχυρά συνδεδεμένο συστατικό.

□