Προβλήματα ελαχίστων μονοπατιών από κοινή αφετηρία

(Single-source shortest path problems)

Αφορμή για την εξέτασή τους

- Έχουν μια άπληστη λύση (Αλγόριθμος του Dijkstra).
- Βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά πραγματικά προβλήματα.

Παραδείγματα

- Με δεδομένο έναν οδικό χάρτη της Βόρειας Αμερικής (ή οποιασδήποτε άλλης περιοχής) να βρεθούν οι αποστάσεις από τη Νέα Υόρκη προς όλες τις άλλες πόλεις του χάρτη.

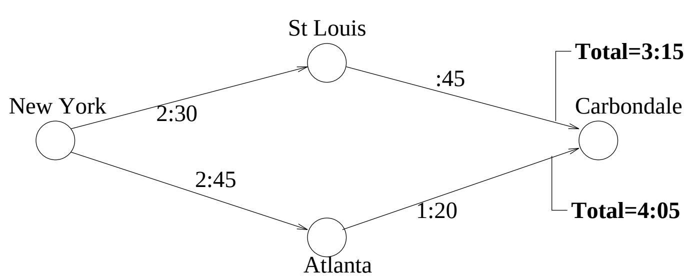
Αναπαριστούμε τις πόλεις σαν κόμβους,
τους δρόμους σαν ακμές, και
τις αποστάσεις μεταξύ πόλεων σαν βάρη/ετικέτες των ακμών.

Άρα, αρκεί να βρεθούν τα ελάχιστα μονοπάτια προς όλους τους κόμβους από τον κόμβο που αναπαριστά τη Νέα Υόρκη.

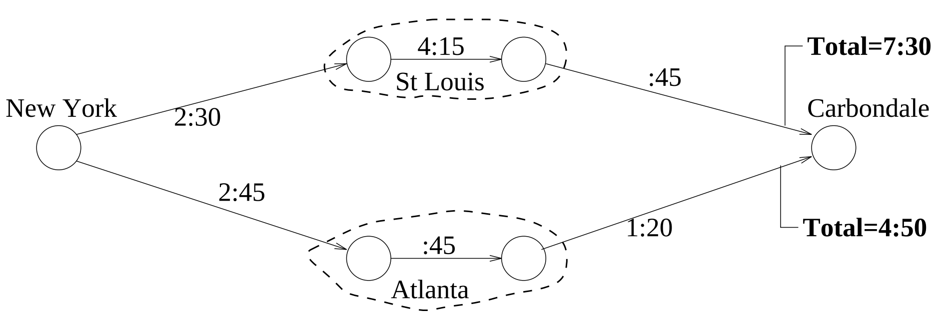
- Με δεδομένο το πρόγραμμα πτήσεων και τη διάρκεια κάθε πτήσης, να βρεθεί ο ταχύτερος τρόπος για να ταξιδεύσει κάποιος από τη Νέα Υόρκη στο Carbondale της πολιτείας Illinois.

Λύση

Να αναπαρασταθούν οι πόλεις σαν κόμβοι, οι πτήσεις σαν ακμές, και η διάρκεια-πτήσεων σαν βάρη ακμών.



- Πως θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα εάν θέλουμε να ληφθεί υπ΄ όψιν και ο χρόνος αναμονής μεταξύ των πτήσεων;



Προβλήματα ελαχίστων μονοπατιών από κοινή αφετηρία

Είσοδος: • Ένα κατευθυνόμενο, με βάρη, γράφημα $G = (V, E)$ και μία συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathcal{R}$ που αντιστοιχεί σε κάθε ακμή ένα πραγματικό αριθμό (βάρος).
• Ένας κόμβος αφετηρία s.

Έξοδος: Τα ελάχιστα μονοπάτια από το s προς κάθε άλλο κόμβο του G.

Ορισμοί

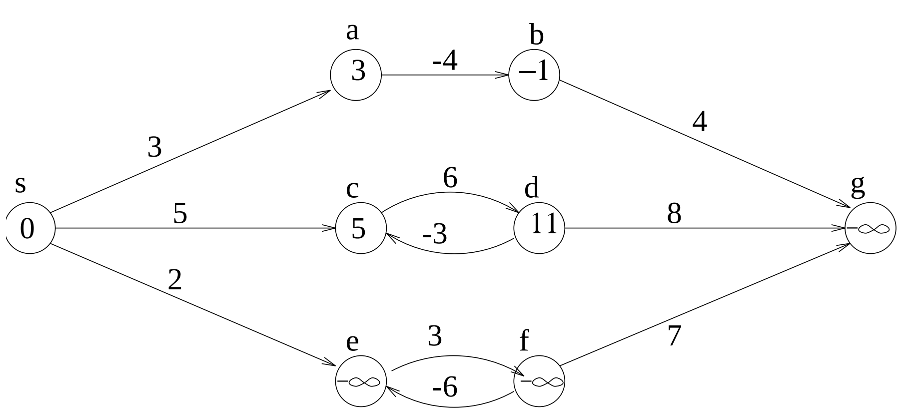
Το *βάρος του μονοπατιού* $p = (v_0, v_1, \cdots, v_k)$ είναι ίσο με το άθροισμα των βαρών των ακμών που αποτελούν το μονοπάτι.

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Το *μονοπάτι ελάχιστου βάρους* από τον u προς τον v ορίζεται σαν:

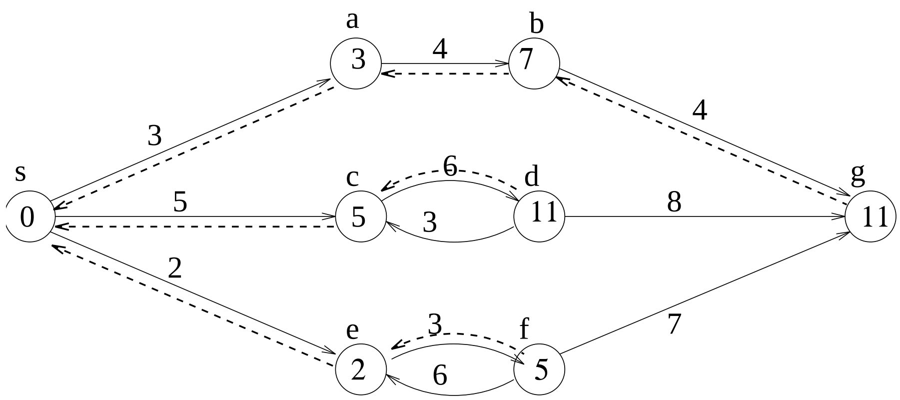
$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\to} v\} & \text{εάν υπάρχει μονοπάτι από τον } u \text{ προς τον } v \\ +\infty & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Αρνητικά βάρη ακμών



Κύκλοι που περιέχουν ακμές με αρνητικά βάρη:
• Κόστος κύκλου ≥ 0.
• Κόστος κύκλου < 0.

Πως αναπαριστάμε τα ελάχιστα μονοπάτια

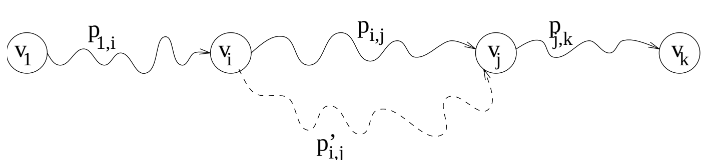


- Στη συνέχεια, θα επικεντρώσουμε τη προσοχή μας μόνο στην εύρεση του κόστους των ελαχίστων μονοπατιών.
- Τα μονοπάτια μπορεί να ανακτηθούν με τον ίδιο ακριβώς αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάκτηση των μονοπατιών από ένα δένδρο κατά-πλάτους αναζήτησης.

Βέλτιστη δομή ενός ελαχίστου μονοπατιού

Λήμμα (*Τα υπό-μονοπάτια ενός ελαχίστου μονοπατιού είναι ελάχιστα μονοπάτια*) Υποθέστε ένα κατευθυνόμενο, με βάρη, γράφημα $G = (V, E)$ και μία συνάρτηση βάρους w, και έστω $p = (v_1, v_2, \cdots, v_k)$ είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι από τον v_1 προς τον v_k. Για $1 \leq i \leq j \leq k$, έστω $p_{i,j} = (v_i, \cdots, v_j)$ το υπό-μονοπάτι του p από τον v_i προς τον v_j. Τότε, το $p_{i,j}$ είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι.

Απόδειξη (Με εις άτοπο επαγωγή)



- $w(p) = w(p_{1,i}) + w(p_{i,j}) + w(p_{j,k})$ και το $w(p)$ είναι ελάχιστο.
- Υποθέστε ότι το $p_{i,j}$ δεν είναι ελάχιστο. Έστω ότι το $p'_{i,j}$ είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι.
- $w(p'_{i,j}) < w(p_{i,j})$.
- Τότε, το p δεν είναι ελάχιστο μονοπάτι. Μια καθαρή αντίφαση.
  (Το μονοπάτι p' : $p_{1,i} - p'_{i,j} - p_{j,k}$ έχει μικρότερο βάρος από το p.)

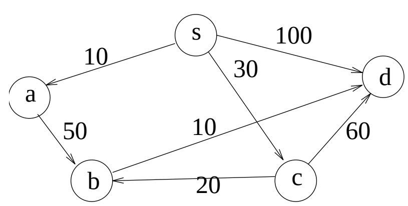
$\square$

Ο αλγόριθμος του Dijkstra

- Λύνει το πρόβλημα των ελαχίστων μονοπατιών από κοινή αφετηρία για ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με μη αρνητικά βάρη ακμών.
- S: σύνολο κόμβων προς τους οποίους το τελικό ελαχίστου βάρους μονοπάτι από την αφετηρία s έχει ήδη προσδιοριστεί.
- $d[v]$: ένα άνω-όριο για το βάρος του ελαχίστου μονοπατιού από τον s προς τον v.
- Q: μία ουρά προτεραιότητας που περιέχει τους κόμβους του συνόλου $V - S$ με κλειδί τις d τιμές τους.

$Dijkstra(G, w, s)$
for each vertex $v \in V$ **do**
  $d[v] = +\infty$
$d[s] = 0$
$Q = V$
while $Q \neq \emptyset$ **do**
  $u = Extract\_min(Q)$
  $S = S \cup \{u\}$
  for each vertex $v \in adj[u]$ **and** $v \in V - S$ **do**
    if $d[v] > d[u] + w[u, v]$ **then**
      $d[v] = d[u] + w[u, v]$

Παράδειγμα



Επανάληψη	S	u	$d[s]$	$d[a]$	$d[b]$	$d[c]$	$d[d]$
αρχικά	$\emptyset$	-	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	$\{s\}$	s	0	10	$+\infty$	30	100
2	$\{s, a\}$	a	0	10	60	30	100
3	$\{s, a, c\}$	c	0	10	50	30	90
4	$\{s, a, b, c\}$	b	0	10	50	30	60
5	$\{s, a, b, c, d\}$	d	0	10	50	30	60

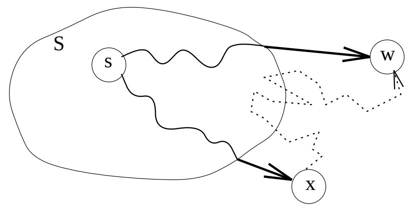
Ανάλυση

- Εάν η Q υλοποιηθεί σαν ένα διάνυσμα: $O(n^2)$.
- Εάν η Q υλοποιηθεί σαν ένας δυαδικός σωρός: $O(E \log V)$. (Προτιμάται για αραιά γραφήματα.)

Ορθότητα του αλγόριθμου του Dijkstra

- Το $d[v]$, για κάθε κόμβο v, περιέχει το κόστος του ελάχιστου μονοπατιού που αποτελείται μόνο από κόμβους του συνόλου S.
- Κάθε φορά που εισάγουμε ένα νέο κόμβο w στο S, το $d[w]$ περιέχει το κόστος του ελαχίστου μονοπατιού από την αφετηρία s προς τον w.

Απόδειξη



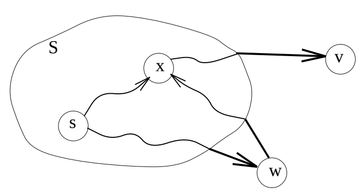
Εξετάστε ένα υποθετικό ελάχιστο μονοπάτι από τον s προς τον w, το οποίο ‘βγαίνει’ από το S και πηγαίνει πρώτα στον x, για να φθάσει αργότερα στον w.

Εάν το μονοπάτι αυτό έχει μικρότερο βάρος, τότε ο x έπρεπε να είχε επιλεγεί από τον αλγόριθμο αντί του w. Άρα, δεν εκτελέσαμε τον αλγόριθμο σωστά.
(Κατανοήστε πόσο σημαντικό είναι το ότι δεν έχουμε αρνητικά βάρη.)

□

- Το $d[v]$ είναι **πάντα** το κόστος του ελάχιστου μονοπατιού από τον s προς τον v που περνάει μόνο από κόμβους του S.

Απόδειξη



Όταν προσθέτουμε τον w στο S πρέπει να βεβαιωθούμε ότι εάν υπάρχει ένα μικρότερου κόστους μονοπάτι που καταλήγει στον v με προηγούμενο σταθμό τον w, τότε ενημερώνουμε κατάλληλα την τιμή $d[v]$.

• Εάν το μονοπάτι πηγαίνει μέσω του ‘παλιού’ S στον w και μετά κατευθείαν στον v, τότε η τιμή $d[v]$ έχει ενημερωθεί σωστά.

• Τι συμβαίνει εάν το μονοπάτι πηγαίνει στον w, μετά στον $x \in S$ και μετά στον v; (Ο αλγόριθμος δεν κάνει τίποτε για αυτή την περίπτωση.)

Η περίπτωση αυτή δεν μπορεί να συμβεί!

Μιας και ο x εισήχθη στο S πριν από τον w, το ελάχιστο από όλα το μονοπάτια από την αφετηρία s προς τον x διέρχεται αποκλειστικά μέσω του παλιού S. Άρα, το μονοπάτι προς τον x μέσω του w δεν έχει μικρότερο κόστος συγκριτικά με το μονοπάτι που περνά αποκλειστικά από κόμβους του S. Άρα, είναι αδύνατο να βελτιωθεί η τιμή $d[v]$. □