Πολλαπλασιασμός πινάκων

Είσοδος: Δύο $n \times n$ πίνακες A και B.

Έξοδος: Πίνακας C τέτοιος ώστε $C = A \times B$.

- **Η συμβατική μέθοδος**

$$C[i,j] = \sum_{1 \le k \le n} A[i,k] \cdot B[k,j]$$

```
/* Συμβατική μέθοδος πολλαπλασιασμού. C = A × B */

for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        for k = 1 to n
            C[i,j] := C[i,j] + A[i,k] · B[k,j]
```

Ανάλυση: $\Theta(n^3)$

- **Μια 'Διαίρει-και-βασίλευε' προσέγγιση**

Υποθέτουμε ότι $n = 2^k$ (ή, $k = \log n$).

Εάν το $A \times B$ γραφεί ως

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

τότε

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= A_{1,1} \times B_{1,1} + A_{1,2} \times B_{2,1} \\ C_{1,2} &= A_{1,1} \times B_{1,2} + A_{1,2} \times B_{2,2} \\ C_{2,1} &= A_{2,1} \times B_{1,1} + A_{2,2} \times B_{2,1} \\ C_{2,2} &= A_{2,1} \times B_{1,2} + A_{2,2} \times B_{2,2} \end{aligned} \tag{2}$$

Πολυπλοκότητα

$$T(n) = \begin{cases} b & n \le 2 \\ 8T(\frac{n}{2}) + cn^2 & n > 2 \end{cases} \tag{3}$$

Είναι αυτή η μέθοδος καλύτερη;

$$\begin{aligned}T(n) = 8T(\tfrac{n}{2}) + cn^2 \; &= \; 8\left(8T(\tfrac{n}{4}) + c(\tfrac{n}{2})^2\right) + cn^2 \; = \\ &= 8^2T(\tfrac{n}{4}) + cn^2\left(1 + 8(\tfrac{1}{2})^2\right) \; = \\ &= 8^2\left(8T(\tfrac{n}{8}) + c(\tfrac{n}{4})^2\right) + cn^2\left(1 + 8(\tfrac{1}{2})^2\right) \; = \\ &= 8^3T(\tfrac{n}{4}) + cn^2\left(1 + 8(\tfrac{1}{2})^2 + 8^2(\tfrac{1}{2^2})^2\right) \; = \\ &= \cdots \; = \\ &= 8^kT(1) + cn^2\left(1 + 8(\tfrac{1}{2})^2 + 8^2(\tfrac{1}{2^2})^2 + \; \cdots \; + 8^{k-1}(\tfrac{1}{2^{k-1}})^2\right) \\ &= \Theta(n^3)\end{aligned}$$

- $8^k \; = \; 8^{\log_2 n} \; = \; n^{\log_2 8} \; = \; n^3$
- $cn^2\left(1 + 8(\tfrac{1}{2})^2 + 8^2(\tfrac{1}{2^2})^2 + \; \cdots \; + 8^{k-1}(\tfrac{1}{2^{k-1}})^2\right) \; = \; cn^2 \sum_{j=0}^{\log_2 n - 1} 8^j(\tfrac{1}{2^j})^2 \; = \; = cn^2 \sum_{j=0}^{\log_2 n - 1} 2^j \le cn^3$

- Εάν αντί της (3) είχαμε:

$$T(n) = \begin{cases} b & n \le 2 \\ 7T(\frac{n}{2}) + cn^2 & n > 2 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}T(n) = 7T(\tfrac{n}{2}) + cn^2 \; &= \; 7\left(7T(\tfrac{n}{4}) + c(\tfrac{n}{2})^2\right) + cn^2 \; = \\ &= 7^2T(\tfrac{n}{4}) + cn^2\left(1 + 7(\tfrac{1}{2})^2\right) \; = \\ &= 7^2\left(7T(\tfrac{n}{8}) + c(\tfrac{n}{4})^2\right) + cn^2\left(1 + 7(\tfrac{1}{2})^2\right) \; = \\ &= 7^3T(\tfrac{n}{8}) + cn^2\left(1 + 7(\tfrac{1}{2})^2 + 7^2(\tfrac{1}{2^2})^2\right) \; = \\ &= \cdots \; = \\ &= 7^kT(1) + cn^2\left(1 + 7(\tfrac{1}{2})^2 + 7^2(\tfrac{1}{2^2})^2 + \; \cdots \; + 7^{k-1}(\tfrac{1}{2^{k-1}})^2\right) \\ &= \Theta(n^{\log_2 7}) \; = \; \Theta(n^{2.71})\end{aligned}$$

- $cn^2\left(1 + 7(\tfrac{1}{2})^2 + 7^2(\tfrac{1}{2^2})^2 + \; \cdots \; + 7^{k-1}(\tfrac{1}{2^{k-1}})^2\right) \; = \; cn^2 \sum_{j=0}^{\log_2 n - 1} 7^j(\tfrac{1}{2^j})^2 \; = \; = cn^2 \sum_{j=0}^{\log_2 n - 1} (\tfrac{7}{4})^j \; = \; cn^2c'(\tfrac{7}{4})^{\log_2 n} = cc'n^{\log_2 7}$

Η μέθοδος πολλαπλασιαμού πινάκων του Strassen

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$P = (A_{1,1} + A_{2,2}) \times (B_{1,1} + B_{2,2})$$
$$Q = (A_{2,1} + A_{2,2}) \times B_{1,1}$$
$$R = A_{1,1} \times (B_{1,2} - B_{2,2})$$
$$S = A_{2,2} \times (B_{2,1} - B_{1,1})$$
$$T = (A_{1,1} + A_{1,2}) \times B_{2,2}$$
$$U = (A_{2,1} - A_{1,1}) \times (B_{1,1} + B_{1,2})$$
$$V = (A_{1,2} - A_{2,2}) \times (B_{2,1} + B_{2,2})$$

$$C_{1,1} = P + S - T + V$$
$$C_{1,2} = R + T$$
$$C_{2,1} = Q + S$$
$$C_{2,2} = P + R - Q + U$$

- 7 πολλαπλασιασμοί και 18 προσθέσεις /αφαιρέσεις.
- $T(n) = \Theta(n^{2.71})$ [Απο την λύση της (4)]

Μερικά αποτελέσματα ...

- **Δεν είναι δυνατόν** να πολλαπλασιάσουμε δύο 2×2 πίνακες με λιγότερους από 7 πολλαπλασιασμούς.
- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων μπορεί να επιτευχθεί σε $O(n^{2.376})$ χρόνο.

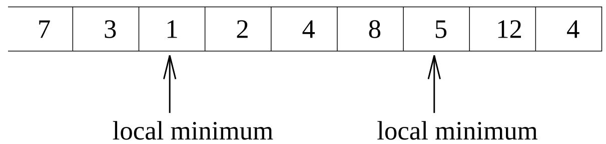
Ποιά μέθοδο να χρησιμοποιούμε;

- Για πολύ μικρούς πίνακες την ‘συμβατική’ μέθοδο.
- Για πίνακες μεσαίου μεγέθους την μέθοδο του Winograd.
- Για πολύ μεγάλους πίνακες την μέθοδο του Strassen.

Υπολογισμός ενός τοπικού ελαχίστου

Ορισμός Με δεδομένο ένα διάνυσμα $A[0..n+1]$, το στοιχείο $A[i]$, $1 \leq i \leq n$, είναι ένα τοπικό ελάχιστο εάν ισχύει ότι $A[i-1] \geq A[i] \leq A[i+1]$

Παράδειγμα



Είσοδος: Ένα διάνυσμα $A[0..n+1]$ τέτοιο ώστε $A[0] = A[n+1] = +\infty$

Έξοδος: Η θέση ενός τοπικού ελάχιστου.

- **Ένας απλός αλγόριθμος**

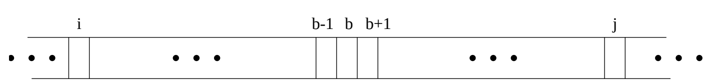
> Διασχίστε το διάνυσμα από τα αριστερά προς τα δεξιά και για κάθε τρία διαδοχικά του στοιχεία ελέγξτε εάν ισχύει $element\_1 \geq element\_2 \leq element\_3$.

Ανάλυση $\Theta(n)$

Μία ‘Διαίρει-και-Βασίλευε’ προσέγγιση

Ισχύει: Εάν στο τμήμα του διανύσματος $A[i..j]$, $j - i \geq 2$ ισχύει ότι $A[i] \geq A[i+1]$ και $A[j-1] \leq A[j]$ τότε στο τμήμα $A[i..j]$ υπάρχει ένα τοπικό ελάχιστο.

Λόγω του ότι $A[0] = A[n+1] = +\infty$, πάντοτε υπάρχει ένα τοπικό ελάχιστο στο διάνυσμα A.



> ...
>
> **if** $A[b] \geq A[b+1] \implies \exists$ ένα τοπικό ελάχιστο στο $A[b..j]$
>
> **else if** $A[b] \geq A[b-1] \implies \exists$ ένα τοπικό ελάχιστο στο $A[i..b]$
>
> **else** $A[b]$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο
>
> ...

Ανάλυση $O(\log n)$