Ασυμπτωτική Πολυπλοκότητα

Θ-notation:

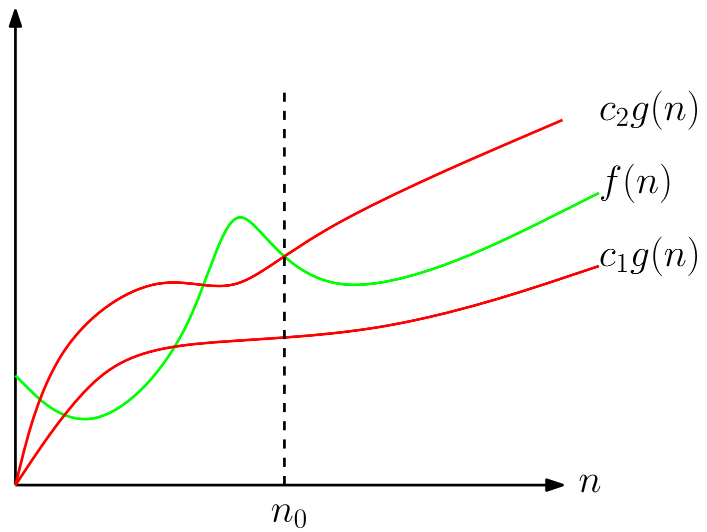
Δοθέντος μια συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $\Theta(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων:

$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists$ θετικές σταθερές c_1, c_2 και n_0 έτσι ώστε:

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \forall n \geq n_0\}$$

Σύμβαση: Γράφουμε $f(n) = \Theta(g(n))$ αντί για $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Λέμε ότι η $g(n)$ είναι ένα ασυμπτωτικά σφικτό φράγμα (asymptotically tight bound) της $f(n)$.



Εφαρμογή: Να δειχθεί ότι $n^3 - n^2 + 1000n + 5 = \Theta(n^3)$.

Θα πρέπει να βρούμε θετικές σταθερές c_1, c_2 και n_0 τέτοιες ώστε:

$$0 \leq c_1 n^3 \leq n^3 - n^2 + 1000n + 5 \leq c_2 n^3, \quad \forall n \geq n_0$$

ή ισοδύναμα:

$$0 \leq c_1 \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1000}{n^2} + \frac{5}{n^3} \leq c_2, \quad \forall n \geq n_0$$

- $1 - \frac{1}{n} + \frac{1000}{n^2} + \frac{5}{n^3} \leq 1006, \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow c_2 = 1007$
- $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1000}{n^2} + \frac{5}{n^3}, \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$

Τελικά: $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1006, n_0 = 2$

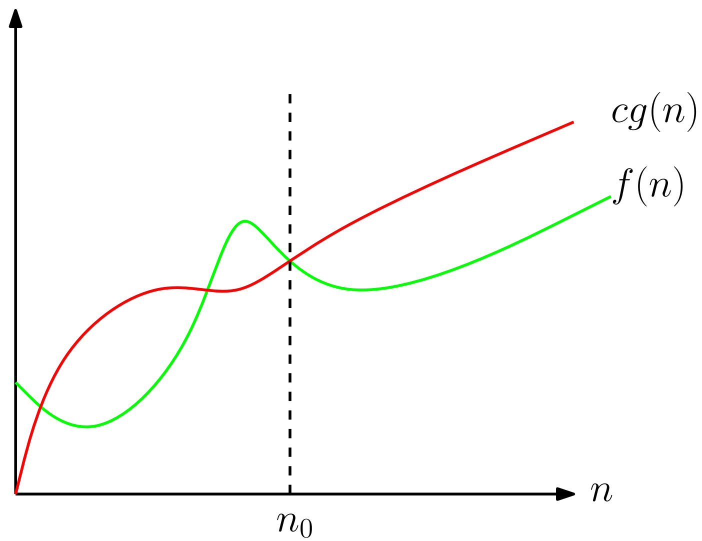
O-notation (Ασυμπτωτικό άνω φράγμα):

Δοθέντος μια συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $O(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων:

$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists$ θετικές σταθερές c και n_0 έτσι ώστε: $0 \leq f(n) \leq cg(n) \forall n \geq n_0\}$

Σύμβαση: Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αντί για $f(n) \in O(g(n))$.

Χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της χείριστης περίπτωσης του χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου.



Εφαρμογή: Να δειχθεί ότι

1. $3n^2 + 5n \log n = O(n^2)$.
2. $3n^2 + 5n^2 \log n = O(n^2 \log n)$.
3. $n = O(n^2)$

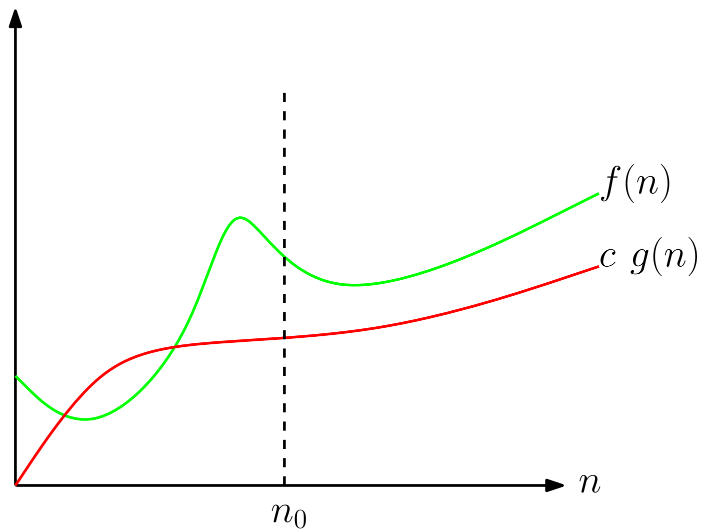
Ω-notation (Ασυμπτωτικό κάτω φράγμα):

Δοθέντος μια συνάρτηση $g(n)$, συμβολίζουμε με $\Omega(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων:

$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists$ θετικές σταθερές c και n_0 έτσι ώστε: $0 \leq cg(n) \leq f(n) \forall n \geq n_0\}$

Σύμβαση: Γράφουμε $f(n) = \Omega(g(n))$ αντί για $f(n) \in \Omega(g(n))$.

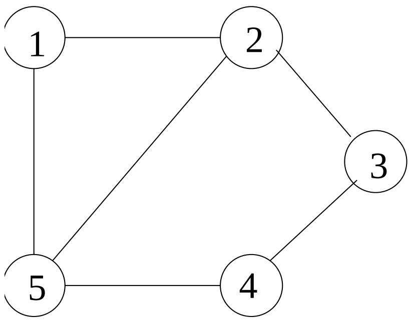
Παράδειγμα: $n^2 + 3n = \Omega(n)$.



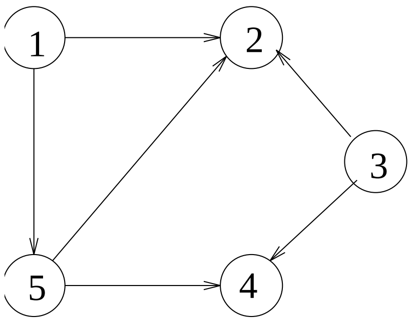
Αναπαράσταση των γραφημάτων

Με Πίνακα γειτονικών κόμβων (Adjacency matrix representation)

Ένας $|V| \times |V|$ πίνακας $A = (a_{ij})$ τέτοιος ώστε: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } (i,j) \in E \\ 0 & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$



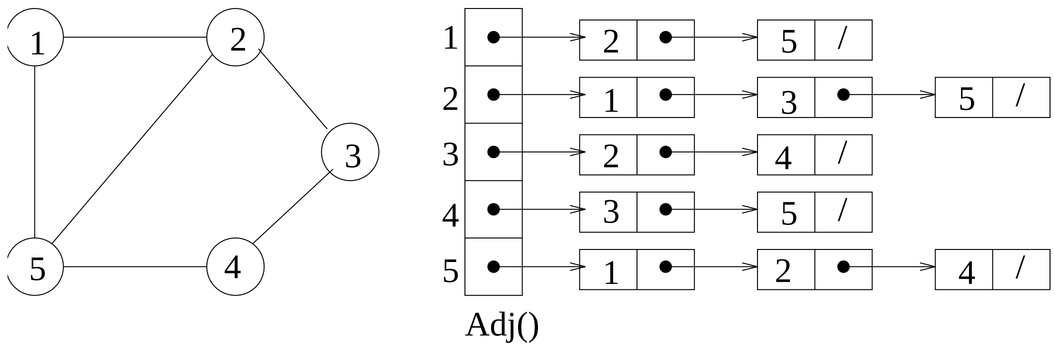
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	1	1	0	1	0

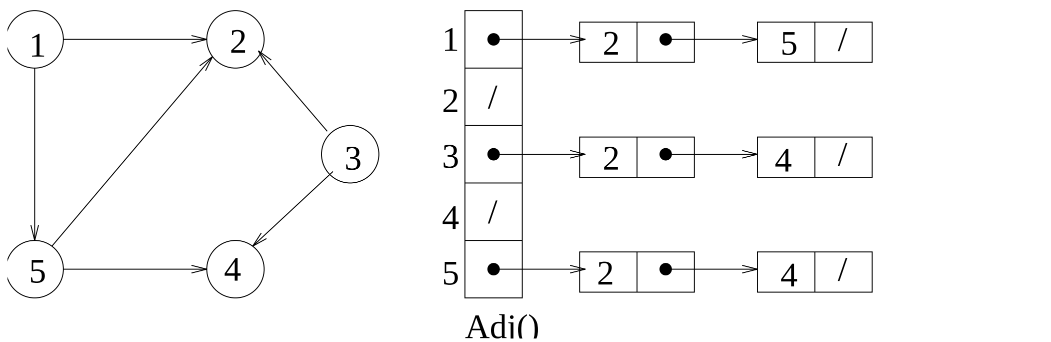


	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0
4	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0

Λίστες γειτονικών κόμβων (Adjacency list representation)

- Ένα διάνυσμα Adj από $|V|$ λίστες, μία για κάθε κόμβο του V.
- Για κάθε $u \in V$, η λίστα γειτονικών κόμβων $Adj(u)$ περιέχει όλους τους κόμβους v για τους οποίους ισχύει ότι η ακμή $(u, v) \in E$.





Ανάστροφο Γράφημα (Transpose Graph):

Το ανάστροφο γράφημα ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι το γράφημα $G^T = (V, E^T)$, όπου:

$$E^T = \{(u, v) \in V \times V : (v, u) \in E\}$$

Άσκηση: Να δοθούν αποδοτικοί αλγόριθμοι οι οποίοι να υπολογίζουν το ανάστροφο γράφημα G^T ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G, όταν:

1. Το G αναπαρίσταται ως πίνακας γειτονικών κόμβων.
2. Το G αναπαρίσταται με λίστες γειτονικών κόμβων.

Για την αναπαράσταση με πίνακα γειτονικών κόμβων:

- Έστω A ο πίνακας γειτονικών κόμβων του G.
- Υπολογίζουμε τον πίνακα A^T γειτονικών κόμβων του G^T ως εξής:

```
for i ← 1 to |V| do
    for j ← 1 to |V| do
        A^T[i, j] ← A[j, i]
```

Πολυπλοκότητα: $O(|V|^2)$

Για την αναπαράσταση με λίστες γειτονικών κόμβων:

- Έστω Adj_G η λίστα γειτονικών κόμβων του G.
- Υπολογίζουμε τη λίστα γειτονικών κόμβων Adj_G^T του G^T ως εξής:

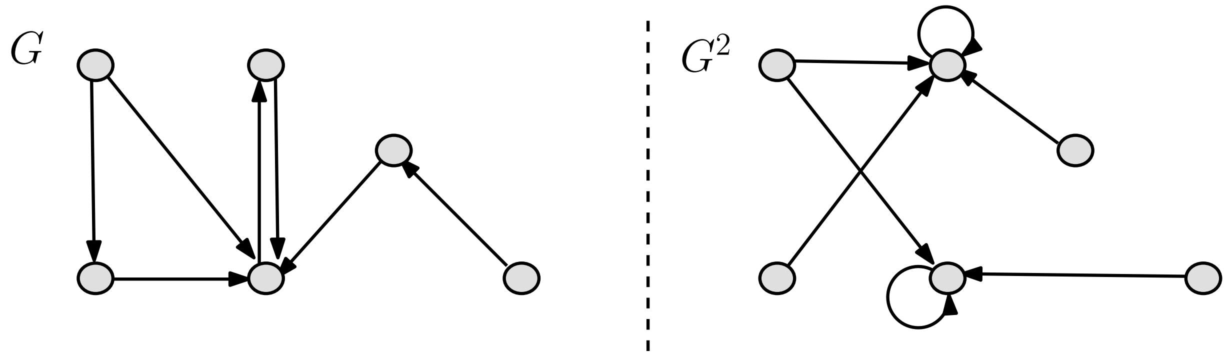
```
foreach vertex v ∈ V do
    foreach vertex u ∈ Adj_G(v) do
        Add v in list Adj_G^T(u)
```

Πολυπλοκότητα: $O(|V| + |E|)$

Τετράγωνο Γράφημα (Square Graph):

Το τετράγωνο γράφημα ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ είναι το γράφημα $G^2 = (V, E^2)$, όπου:

$$E^2 = \{(u, v) \in V \times V : \exists\ w \in V \text{ έτσι ώστε } (u, w) \in E \text{ και } (w, v) \in E\}$$



Άσκηση: Να δοθούν αποδοτικοί αλγόριθμοι οι οποίοι να υπολογίζουν το τετράγωνο γράφημα G^2 ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G, όταν:

1. Το G αναπαρίσταται ως πίνακας γειτονικών κόμβων.
2. Το G αναπαρίσταται με λίστες γειτονικών κόμβων.

Για την αναπαράσταση με πίνακα γειτονικών κόμβων:

- Έστω A ο πίνακας γειτονικών κόμβων του G.
- Υπολογίζουμε τον πίνακα A^2 γειτονικών κόμβων του G^2 ως εξής:

```
for i ← 1 to |V| do
    for j ← 1 to |V| do
        A²[i, j] ← false
        for k ← 1 to |V| do
            A²[i, j] ← (A[i, k] AND A[k, j]) OR A²[i, j]
```

Πολυπλοκότητα: $O(|V|^3)$

Για την αναπαράσταση με λίστες γειτονικών κόμβων:

- Έστω out_G η λίστα γειτονικών κόμβων του G.
- Υπολογίζουμε τη λίστα γειτονικών κόμβων out_G^2 του G^2 ως εξής:

```
//Create in_G
foreach vertex v ∈ V do
    foreach vertex u ∈ out_G(v) do
        Add v in list in_G(u)
//Create out_G²
foreach vertex v ∈ V do
    foreach vertex u ∈ in_G(v) do
        foreach vertex w ∈ out_G(v) do
            Add w in list out_G²(u)
Remove duplicates from out_G²
```

Πολυπλοκότητα: $\sum_{v \in V} d^+(v)d^-(v) = |V|^3$